

Cette activité est conçue pour apprendre. Il est indispensable de se corriger après chaque question. Bien lire les solutions pour pouvoir faire la suite.

Ex 1 - Avoir de bonnes références

L'Insee (Institut national de la statistique et des études économiques) a publié en 2019 des chiffres sur la structure par âge des « cadres et des professions intellectuelles supérieures ». Les ingénieurs sont comptabilisés dans les cadres par l'INSEE.

Les ingénieurs (ou cadres techniques d'entreprises) représentent 29,2 % des cadres.

Voici la répartition des cadres ingénieurs (et assimilés) par âge ainsi que celles des cadres non ingénieurs.

	15 – 24 ans	25 – 50 ans	Plus de 50 ans	Total
Cadres ingénieurs	3,5 %	72,2 %	24,3 %	100 %
Cadres non ingénieurs	2,4 %	61,8 %	35,8 %	100 %

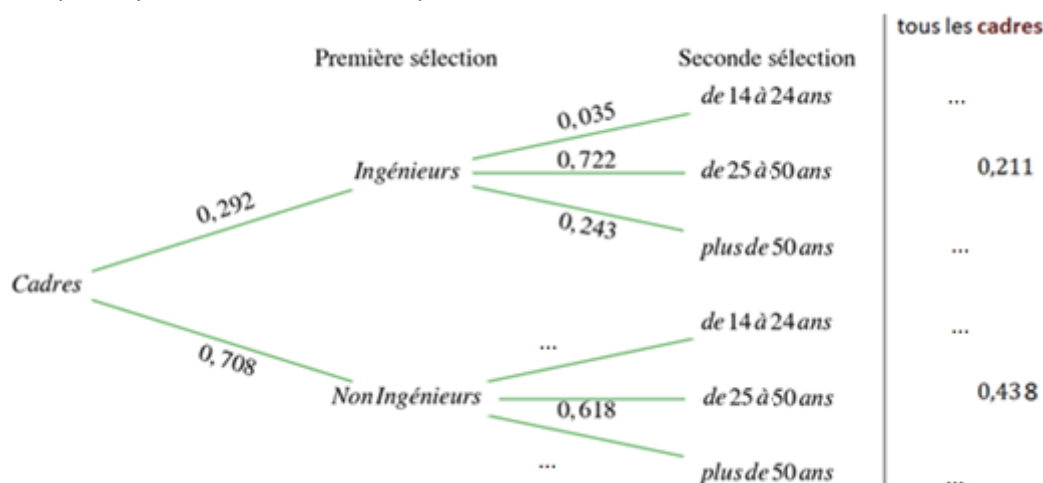
Echauffement

1. Faire une phrase avec 24,3 % puis une phrase avec 2,4 %
2. Quel pourcentage des cadres représentent les non ingénieurs ?
3. Ursule, élève de lycée, a fait le calcul : $\frac{3,5}{100} + \frac{2,4}{100} = \frac{5,9}{100}$.

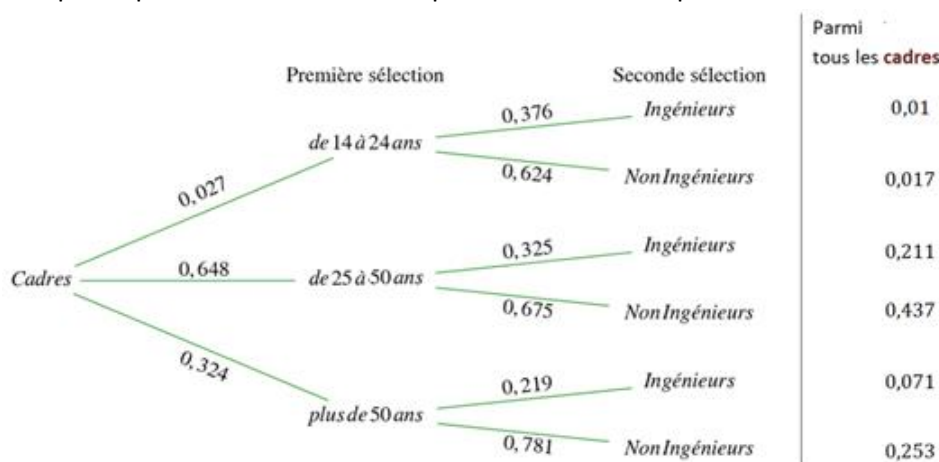
Interpréter son résultat dans la situation. Expliquer lui votre réponse.

Problème On pourra s'appuyer sur deux arbres.

4. Quel pourcentage des cadres représentent les ingénieurs qui ont de 25 à 50 ans ?
5. Quel pourcentage des cadres représentent ceux âgés de 25 à 50 ans ?
6. Quel pourcentage des cadres de 25 à 50 ans représentent les ingénieurs ?
7. Compléter par les 6 nombres manquants



8. Compléter par les 12 nombres manquants et savoir interpréter chacun



Ex 2 – A partir d’effectifs

Voici donnant la population de Lyon en 2017 repartie par âge et par sexe (source *Insee*)

	Hommes	Femmes
0 à 19 ans	56 879	59 065
20 ou plus	185 085	215 263

On tire au sort une personne habitant Lyon (ce peut être un homme ou une femme).

- 1) Quelle est la probabilité que la personne ait moins de 20 ans ?
- 2) Quelle est la probabilité que la personne soit une femme ?
- 3) Quelle est la probabilité qu’il ait moins de 20 ans sachant que c’est un homme ?
- 4) Quelle est la probabilité qu’elle ait moins de 20 ans sachant que c’est une femme ?
- 5) Quelle est la probabilité que la personne soit une femme sachant que c’est un jeune (moins de 20 ans) ?
- 6) Quelle est la probabilité que ce soit une femme sachant que c’est un adulte (20 ans ou plus) ?

Les probabilités seront arrondies au millième.

On pourra considérer les événements suivants :

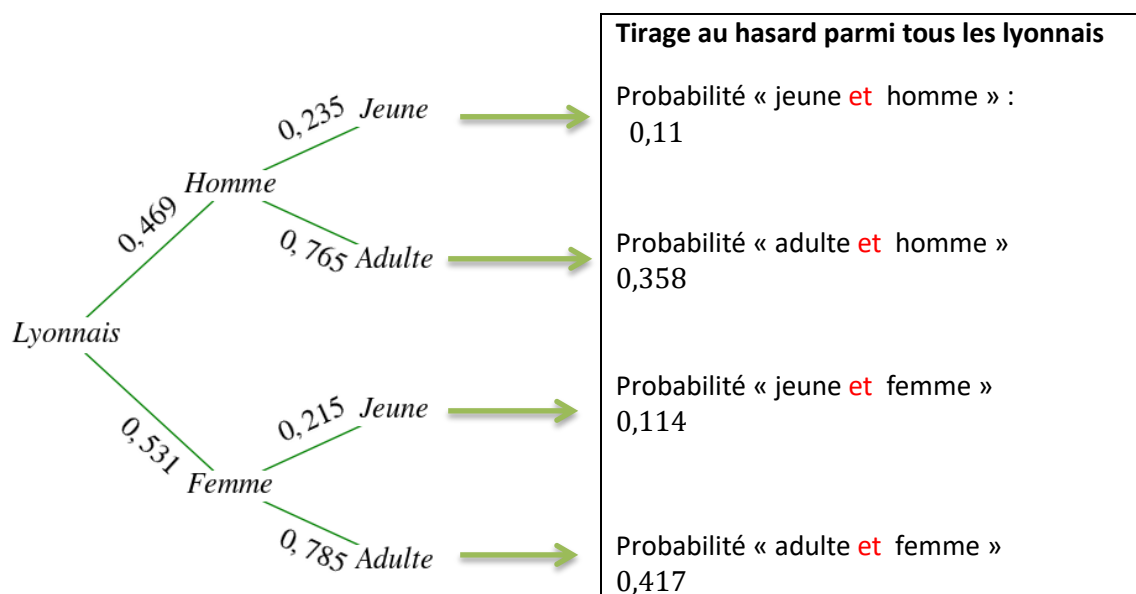
F : « la personne tirée au sort est une femme »

J : « la personne tirée au sort est un jeune (moins de 20 ans) »

Ex 3 – Arbres et probabilités conditionnelles

1. Iconoclaste, élève au lycée Bernoulli, a eu l’idée saugrenue de présenter les résultats de l’exercice précédent comme suit. Il affirme qu’il y a une logique cachée.

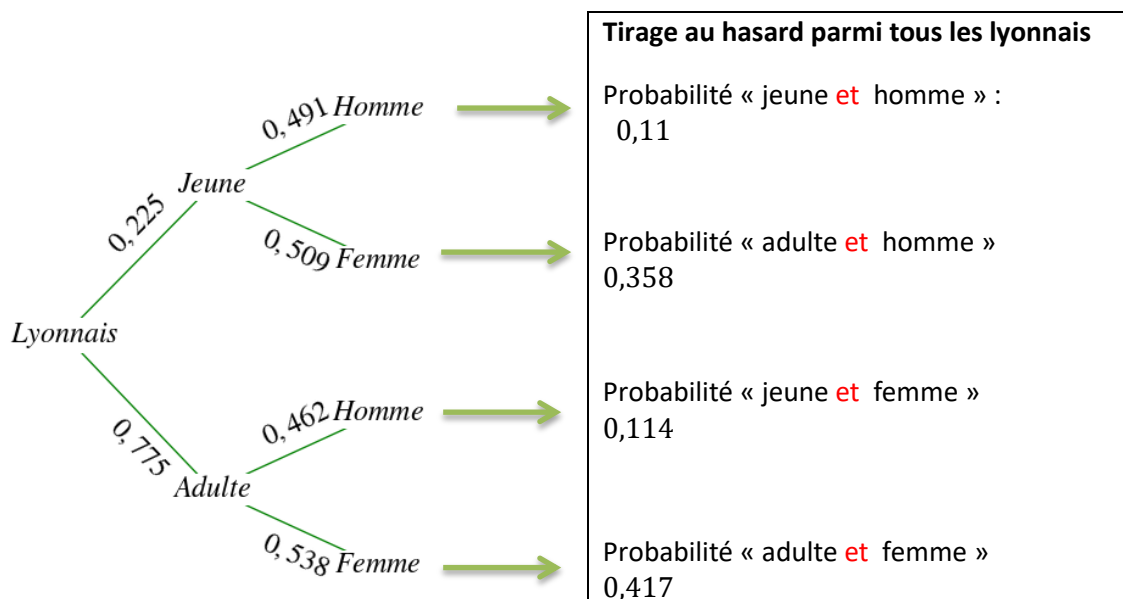
Parmi les lyonnais, Iconoclaste imagine d’avoir d’abord trié les habitants de Lyon en différenciant le sexe puis appliquer un second tri par âge. Il obtient un arbre **conditionné** par le sexe.



Expliciter la logique devinée par Iconoclaste.

Pour noter les probabilités, on pourra utiliser les événements F et J de l’exercice précédent.

2. Sibylle¹, élève de la même classe, a construit un autre arbre **conditionné** par l'âge. Expliciter la logique devinée par Sybille.



Expliciter la logique suggérée par Sibylle.

Pour noter les probabilités, on pourra utiliser les événements F et J de l'exercice précédent.

Pour se corriger

Ex 1 - Avoir de bonnes références

Le tableau de l'énoncé est un résumé de deux tableaux.

- pour la première ligne, on a pris uniquement tous les **cadres ingénieurs** et on les a réparti en catégories d'âges.

	15 – 24 ans	25 – 50 ans	Plus de 50 ans	Total
Cadres ingénieurs	3,5 %	72,2 %	24,3 %	100 %

- pour la seconde ligne, on a pris uniquement les **cadres non ingénieurs** et on les a réparti en catégories d'âges.

	15 – 24 ans	25 – 50 ans	Plus de 50 ans	Total
Cadres non ingénieurs	2,4 %	61,8 %	35,8 %	100 %

Comme les références aux deux lignes ne sont pas les mêmes, à aucun moment on ne peut ajouter, soustraire, moyenner des pourcentages provenant de lignes différentes.

Echauffement

- Question 1** 24,3 % des cadres ingénieurs ont plus de 50 ans.
2,4 % des cadres non ingénieurs ont de 14 à 24 ans.

- Question 2** $\frac{100}{100} - \frac{29,2}{100} = \frac{70,8}{100}$
Les ingénieurs représentent 29,2 % des cadres.
Puisque tous les ingénieurs sont des cadres, les non ingénieurs représentent 70,8 % des cadres.

¹ Une **sibylle** est, durant l'Antiquité une prophétesse, une femme qui fait œuvre de divination

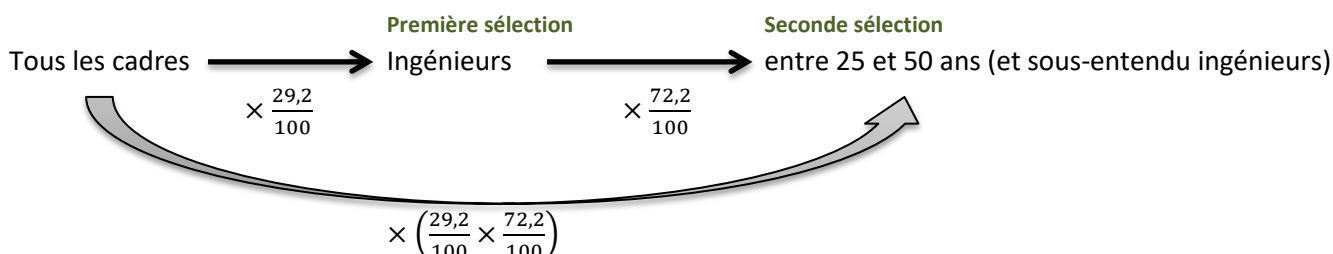
Question 3 Les **ingénieurs ayant de 15 à 24 ans** représentent 3,5 % des **ingénieurs**
 Les **non ingénieurs ayant de 15 à 24 ans** représentent 2,4 % des **non ingénieurs**

Les deux pourcentages ne se rapportent pas à la même référence : les additionner n'a aucun sens.

Si on veut faire des mélanges, c'est comme le sirop de menthe de ma grand-mère, il faut tenir compte des « poids » respectifs des ingrédients de base.

Problème

Question 4



$$\frac{29,2}{100} \times \frac{72,2}{100} \approx 0,211 \approx \frac{21,1}{100}$$

Les **ingénieurs de 25 à 50 ans** représentent 20,7 % des **cadres**.

Autre rédaction :

Les **ingénieurs ayant de 25 à 50 ans** représentent 72,2 % des **ingénieurs**

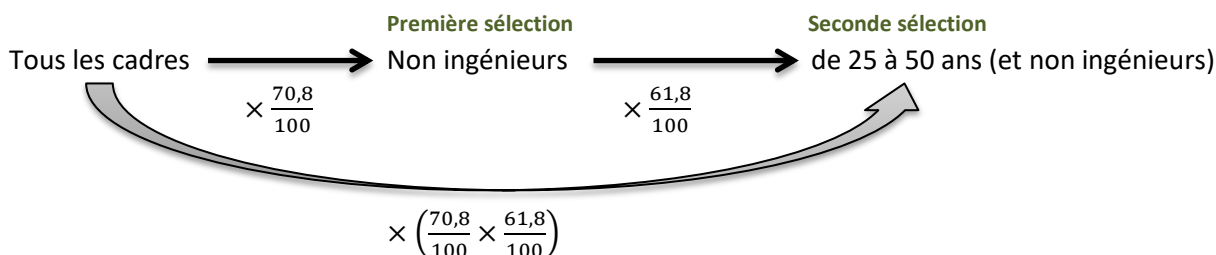
Les **ingénieurs** représentent 29,2 % des **cadres**.

Donc les **ingénieurs ayant de 25 à 50 ans** représentent 72,2 % des 29,2 % des **cadres**.

$$\frac{29,2}{100} \times \frac{72,2}{100} \approx 0,211 \approx \frac{21,1}{100}$$

Les **ingénieurs ayant de 25 à 50 ans** représentent environ 21,1 % des **cadres**.

Question 5



$$\frac{61,8}{100} \times \frac{70,8}{100} \approx 0,4375 \approx \frac{43,8}{100}$$

Les **non ingénieurs ayant de 25 à 50 ans** représentent environ 43,8 % des **cadres**.

Comme les ingénieurs ayant entre 25 et 50 ans représentent environ 21,1 % des **cadres**
 les non ingénieurs ayant entre 25 et 50 ans représentent environ 43,8 % des **cadres**

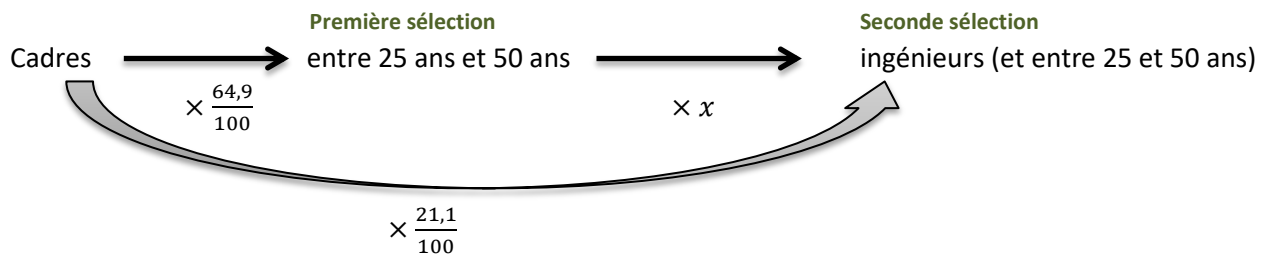
Comme les deux pourcentages se rapportent à la même référence « les **cadres** », additionner peut avoir du sens. Mais dans ce cas, il faut impérativement tenir compte :

- Des doublons éventuels : ici il n'y a pas car aucun cadre n'est à la fois « ingénieur et non ingénieur »
- Des manquants : ici tous les cadres sont bien comptabilisés soit parmi les « ingénieurs », soit parmi les « non ingénieurs »

$$\frac{21,1}{100} + \frac{43,8}{100} = 0,649 \approx \frac{64,9}{100}$$

En France, environ 64,9 % des cadres ont de 25 à 50 ans.

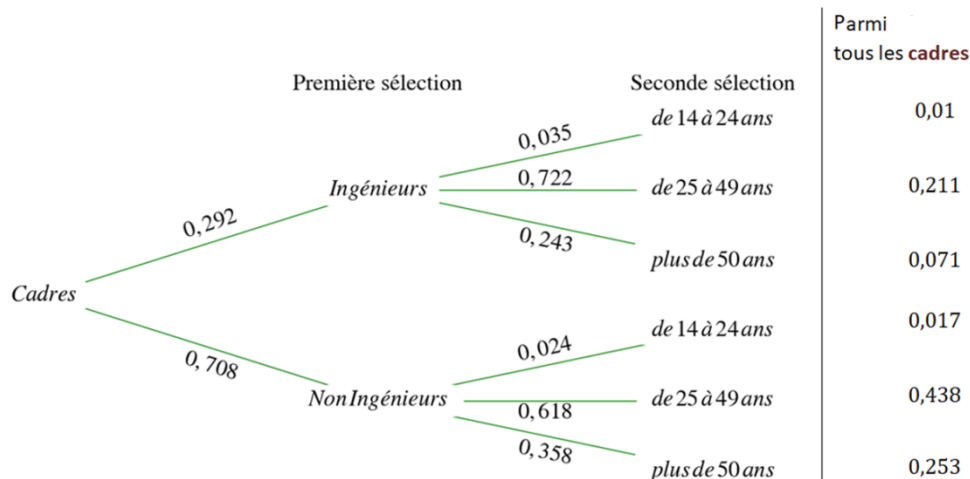
Question 6



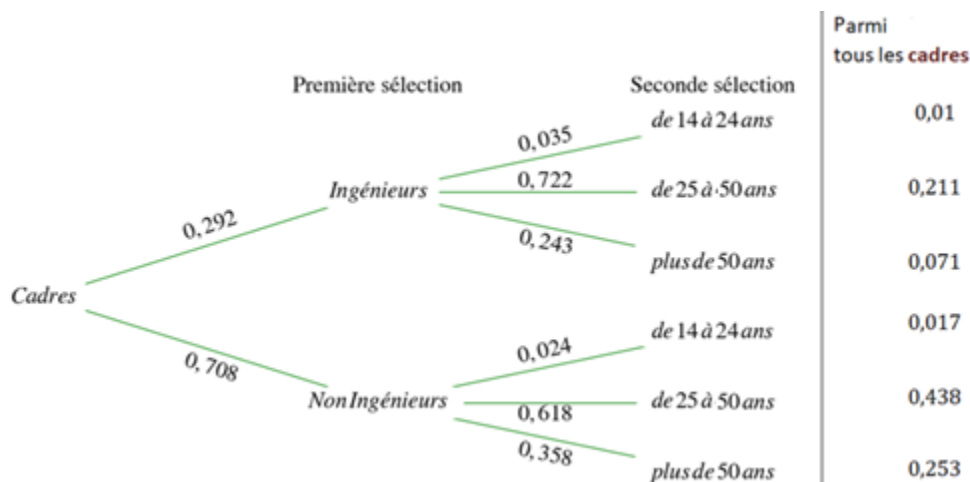
D'où l'équation : $0,649 \times x = 0,211$ donc $x = \frac{0,211}{0,649} \approx 0,325 \approx \frac{32,5}{100}$

Les **ingénieurs** représentent environ 32,5 % des **cadres de 25 ans à 50 ans**.

Question 7



Question 8



Ex 2 – A partir d'effectifs

Pour se représenter les tirages, on peut imaginer que nous disposons d'une urne géante et d'une fiche par Lyonnais avec inscrit dessus son sexe et sa tranche d'âge.

Expérience aléatoire : le tirage au sort réel se fait parmi **tous les lyonnais (et lyonnaises)**.

Dans notre urne imaginaire, on met toutes les fiches.

Le tirage étant au hasard, on fait le **choix du modèle de l'équiprobabilité** : chaque habitant de Lyon a la même probabilité d'être choisi. Ainsi :

- 1) la probabilité que le lyonnais tiré au sort soit un jeune est :

$$P(J) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'événement}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{nombre de jeunes}}{\text{nombre de lyonnais}} = \frac{56\,879 + 59\,065}{516\,292} \approx 0,225$$

- 2) la probabilité que le lyonnais tiré au sort soit une femme est :

$$P(F) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'événement}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{nombre de femmes}}{\text{nombre de lyonnais}} = \frac{59\,065 + 215\,263}{516\,292} \approx 0,531$$

- 3) **Le tirage imaginaire** se fait parmi les 241 964 **hommes** lyonnais.

Dans notre urne imaginaire, on ne garde que les fiches ayant l'inscription « homme ».

Nous avons dit que la probabilité que la personne tirée au sort soit un jeune était $P(J) = 0,225$

Mais ce pronostique a été fait sans savoir que la personne était un homme. Nous allons réévaluer cette probabilité en prenant en compte ce renseignement.

La probabilité que la personne tirée au sort soit un jeune **sachant que c'est un homme** se note $P_{\bar{F}}(J)$

$$P_{\bar{F}}(J) = \frac{\text{nombre de lyonnais qui sont des hommes et qui ont moins de 20 ans}}{\text{nombre d'hommes}} = \frac{56\,879}{241\,964} \approx 0,235$$

- 4) **Le tirage imaginaire** se fait parmi les 274 328 **femmes** lyonnaises.

Dans notre urne imaginaire, on ne garde que les fiches ayant l'inscription « femme ».

Nous avons dit que la probabilité que la personne tirée au sort soit un jeune était $P(J) = 0,225$

Mais c'était sans savoir que la personne était une femme. Nous allons réévaluer cette probabilité en prenant en compte ce renseignement.

La probabilité que la personne tirée au sort soit un jeune **sachant que c'est une femme** se note $P_F(J)$

$$P_F(J) = \frac{\text{nombre de lyonnais qui sont des femmes et qui ont moins de 20 ans}}{\text{nombre de femmes}} = \frac{59\,065}{274\,328} \approx 0,215$$

- 5) **Le tirage imaginaire** se fait parmi les 115 944 **jeunes lyonnais de moins de 20 ans**.

Dans notre urne imaginaire, on ne garde que les fiches ayant l'inscription « moins de 20 ans ».

Nous avons dit que la probabilité que la personne tirée au sort soit une femme était $P(F) = 0,531$

Mais c'était sans savoir que la personne était jeune. Nous allons réévaluer cette probabilité en prenant en compte ce renseignement.

La probabilité que la personne tirée au sort soit une femme **sachant que c'est un jeune** se note $P_J(F)$

$$P_J(F) = \frac{\text{nombre de lyonnais qui sont des femmes et qui sont jeunes}}{\text{nombre de jeunes}} = \frac{59\,065}{115\,944} \approx 0,509$$

- 6) Le tirage imaginaire se fait parmi les 400 348 **adultes lyonnais (20 ans ou plus)**.

Dans notre urne imaginaire, on ne garde que les fiches ayant l'inscription «20 ans ou plus ».

Nous avons dit que la probabilité que la personne tirée au sort soit une femme était $P(F) = 0,531$

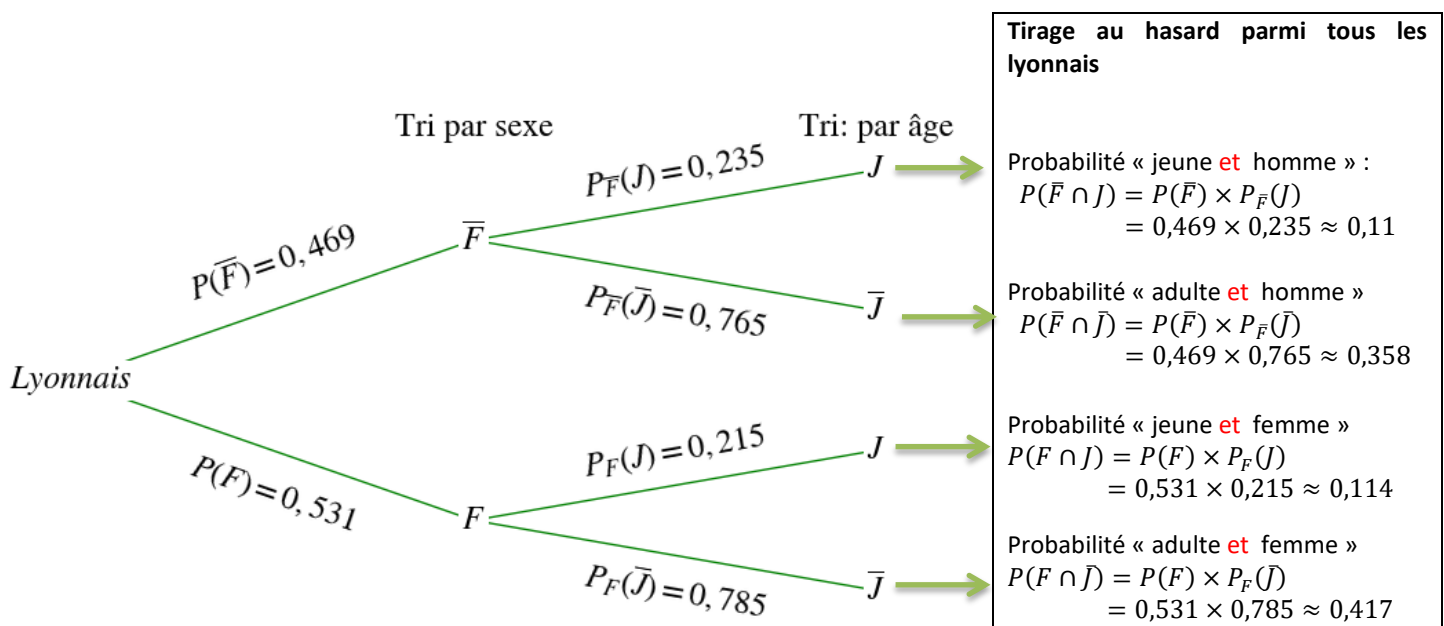
Mais c'était sans savoir que la personne était adulte. Nous allons réévaluer cette probabilité en prenant en compte ce renseignement.

La probabilité que la personne tirée au sort soit une femme **sachant que c'est un adulte** se note $P_{\bar{F}}(F)$

$$P_{\bar{F}}(F) = \frac{\text{nombre de lyonnais qui sont des femmes et qui sont adultes}}{\text{nombre de jeunes}} = \frac{215\,263}{400\,348} \approx 0,538$$

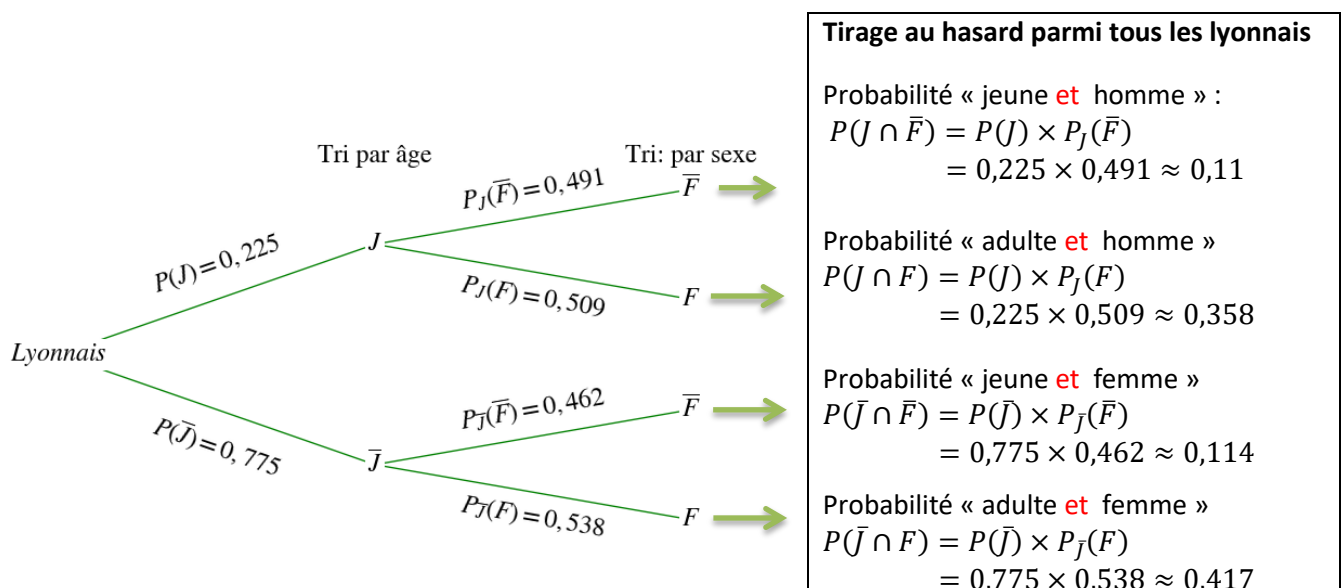
Ex 3 – Arbres et probabilités conditionnelles

Question 1 : Arbre conditionné par le sexe

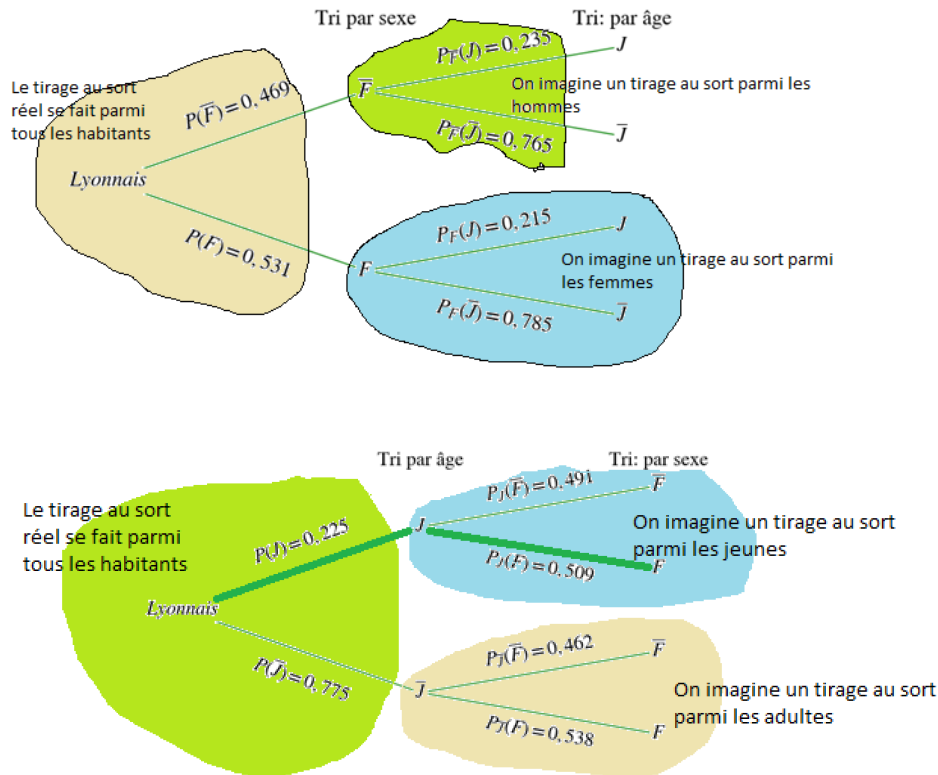


Question 2 : Arbre conditionné par l'âge

Parmi les lyonnais, Sibylle imagine d'avoir d'abord trié les habitants de Lyon par âge puis appliquer un second tri en différenciant le sexe. Elle obtient un arbre **conditionné** par l'âge.



Résumé de cette activité :



Dans un arbre de probabilités, la probabilité d'une « feuille » (extrémité finale) est le produit des probabilités rencontrées en parcourant ce chemin. Exemple pour le chemin en gras :

$$P(J \cap F) = 0,225 \times 0,509 \approx 0,11$$