

Exercice 1 Simplifier si possible (citer toutes les propriétés utilisées)

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{WF} - \overrightarrow{FL}$$

$$\vec{t} = 3 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{PS}$$

$$\vec{s} = 5 \overrightarrow{LM} + 5 \overrightarrow{MA}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{TM}$$

$$\vec{v} = 9 \overrightarrow{HK} + 8 \overrightarrow{TH} + \overrightarrow{KH}$$

Exercice 2 Construire le point Q tel que : $2\overrightarrow{BQ} - 9\overrightarrow{CQ} = \vec{0}$

B
x

C
x

Exercice 3 Construire le point M tel que : $5\overrightarrow{HM} + 4\overrightarrow{DM} + 3\overrightarrow{PM} = \vec{0}$

H
x

D
x

xP

Exercice 4 ABC est un triangle. Soit E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3 \overrightarrow{AC}$

1. Ecrire $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$

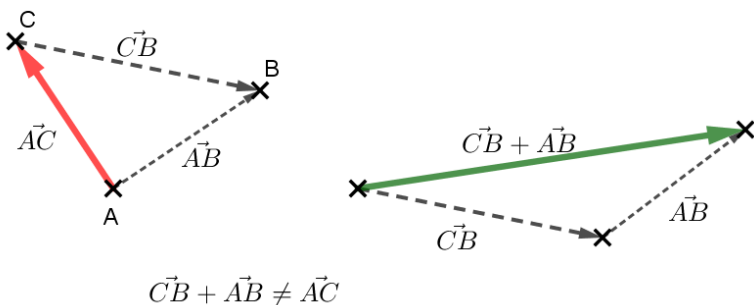
2. Et alors ?

Exercice 5 Soit HGE un triangle. Soit A et L les points tels que : $\overrightarrow{HA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GL} = \frac{1}{4} \overrightarrow{GE}$.
On appelle C le milieu de $[HG]$. Conjecturer, prouver.

Exercice 6 Soit ABC un triangle. Soit D le point tel que : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BA}$. Conjecturer, prouver

Exercice 7 K, T, R, S sont quatre points (non tous alignés) tels que $\overrightarrow{KT} + \overrightarrow{KS} = \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{SR}$. Conjecturer, prouver

Exercice 1



$\vec{p} = \vec{AB} + \vec{CB}$ ne se simplifie pas (voir ci-dessus)

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{WF} - \vec{FL} && \text{il n'y a pas de relation de Chasles avec une soustraction} \\ &= \vec{WF} + \vec{LF} && \text{car } -\vec{FL} = +\vec{LF}\end{aligned}$$

On ne peut pas appliquer la relation de Chasles

$$\vec{t} = 3\vec{AB} + \vec{BC}$$

Attention aux priorités. Pour appliquer la relation de Chasles, il faut :

- une addition
- et pas de coefficients (autres que 1)
- Le point d'extrémité du premier vecteur est aussi le point d'origine du second

Relation de Chasles, pour tout point A, B, C on a : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{SQ} + \vec{PS} = \vec{PS} + \vec{SQ} && \text{dans une somme de vecteurs, l'ordre n'a pas d'importance} \\ &= \vec{PQ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{s} &= 5\vec{LM} + 5\vec{MA} = 5(\vec{LM} + \vec{MA}) && \text{on factorise 5} \\ &= 5\vec{LA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{PM} - \vec{TM} = \vec{PM} + \vec{MT} && \text{car } -\vec{TM} = \vec{MT} \\ &= \vec{PM} + \vec{MT} = \vec{PT}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 9\vec{HK} + 8\vec{TH} + \vec{KH} = (8+1)\vec{HK} + 8\vec{TH} + \vec{KH} && \text{on distribue } \vec{HK} \\ &= 8\vec{HK} + \vec{HK} + 8\vec{TH} + \vec{KH} && \text{on change l'ordre} \\ &= 8\vec{TH} + 8\vec{HK} + \vec{HK} + \vec{KH} && \text{on factorise 8, relation de Chasles} \\ &= 8(\vec{TH} + \vec{HK}) + \vec{HH} && \text{le vecteur } \vec{HH} = \vec{KK} = \vec{AA} = \dots = \vec{0} \\ &= 8\vec{TK} + \vec{0} \\ &= 8\vec{TK}\end{aligned}$$

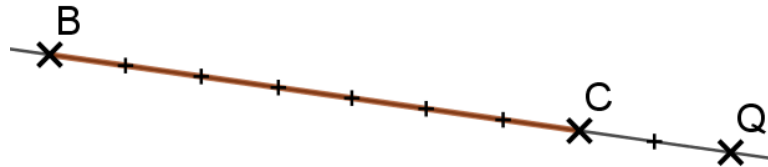
Exercice 2

La difficulté est le point inconnu Q apparaît dans les deux vecteurs $\vec{BQ}$ et $\vec{CQ}$... c'est un peu trop pour pouvoir le construire facilement !

Aussi, on va utiliser la relation de Chasles pour que Q ne soit plus présent que soit dans $\vec{BQ}$, soit dans $\vec{CQ}$.

Par exemple, choisissons $\vec{BQ}$: $\vec{CQ} = \vec{CB} + \vec{BQ}$

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{BQ} - 11\overrightarrow{CQ} &= \vec{0} & \text{donc} & \quad 2\overrightarrow{BQ} - 11(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ}) = \vec{0} \\
& & \text{donc} & \quad 2\overrightarrow{BQ} - 11\overrightarrow{CB} - 11\overrightarrow{BQ} = \vec{0} \\
& & \text{donc} & \quad 2\overrightarrow{BQ} - 9\overrightarrow{BQ} = 11\overrightarrow{CB} \\
& & \text{donc} & \quad -7\overrightarrow{BQ} = -11\overrightarrow{CB} \\
& & \text{donc} & \quad \overrightarrow{BQ} = \frac{-11}{-7}\overrightarrow{CB} = \frac{11}{7}\overrightarrow{BC} \\
& & \text{donc} & \quad Q \text{ est l'image } B \text{ par la translation de vecteur } \frac{11}{7}\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

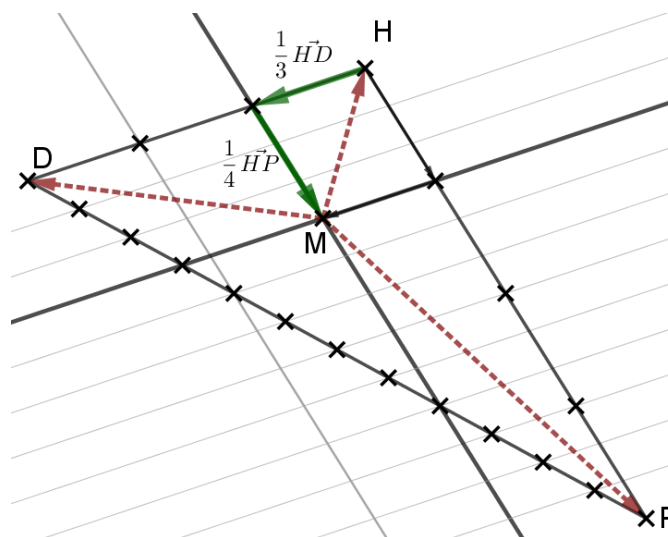


Exercice 3

La difficulté est le point inconnu M apparaît dans les trois vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{PM}$... c'est trop pour pouvoir le construire facilement !

Aussi, on va utiliser la relation de Chasles pour que M ne soit plus présent que soit dans $\overrightarrow{HM}$, soit dans $\overrightarrow{DM}$, soit dans $\overrightarrow{PM}$. Par exemple, choisissons $\overrightarrow{HM}$: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM}$

$$\begin{aligned}
5\overrightarrow{HM} + 4\overrightarrow{DM} + 3\overrightarrow{PM} &= \vec{0} & \text{donc} & \quad 5\overrightarrow{HM} + 4(\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HM}) + 3(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{0} \\
& & \text{donc} & \quad 5\overrightarrow{HM} + 4\overrightarrow{DH} + 4\overrightarrow{HM} + 3\overrightarrow{PH} + 3\overrightarrow{HM} = \vec{0} \\
& & \text{donc} & \quad 12\overrightarrow{HM} = -4\overrightarrow{DH} - 3\overrightarrow{PH} \\
& & \text{donc} & \quad \overrightarrow{HM} = -\frac{4}{12}\overrightarrow{DH} - \frac{3}{12}\overrightarrow{PH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DH} - \frac{1}{4}\overrightarrow{PH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{HP} \\
& & \text{donc} & \quad \overrightarrow{HM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{HP} \\
& & \text{donc} & \quad M \text{ est l'image } H \text{ par la translation de vecteur } \frac{1}{3}\overrightarrow{HD} \\
& & & \quad \text{suivie de la translation de vecteur } \frac{1}{4}\overrightarrow{HP}
\end{aligned}$$



Exercice 4

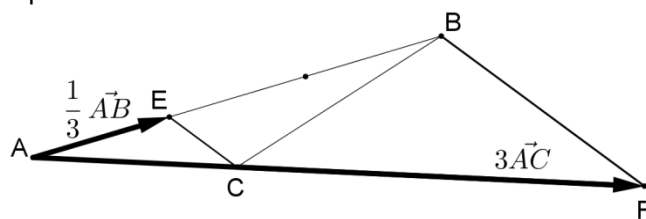
Conjecture à partir de la figure : Les droites (BF) et (EC) semblent parallèles.

Une preuve :

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + 3 \overrightarrow{AC}$$

Ainsi $3 \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BF}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires donc les droites (BF) et (EC) sont parallèles.



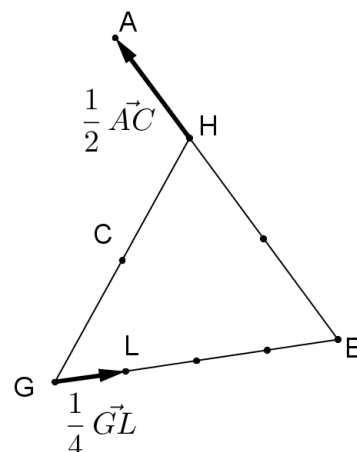
Exercice 5

Conjecture à partir de la figure :

Les points A, C et L semblent alignés.

Une preuve :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} && \text{Faire apparaître } \overrightarrow{HA} \text{ permet d'utiliser } \overrightarrow{HA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{HE} \\ &= -\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} \\ &= -\left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{HE}\right) + \overrightarrow{HC} && \text{Comme } C \text{ est le milieu de } [HG], \overrightarrow{HC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HG} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{HE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{HG} \end{aligned}$$



La figure commence en plaçant HGE . On a réussi à exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de 2 vecteurs de « base » $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$.
On va essayer d'exprimer $\overrightarrow{CL}$ en fonction de ces mêmes vecteurs.

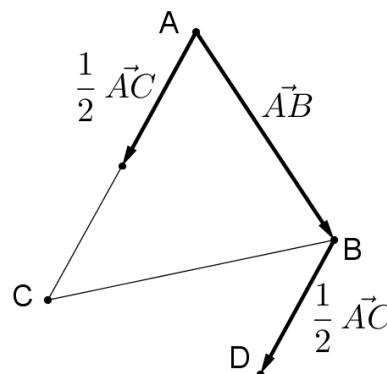
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CL} &= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GL} && \text{Faire apparaître } \overrightarrow{GL} \text{ permet d'utiliser la définition de } L \\ &= \overrightarrow{HC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{GE} && \text{Comme } C \text{ est le milieu de } [HG], \overrightarrow{HC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HG}. \text{ De plus, } \overrightarrow{GL} = \frac{1}{4} \overrightarrow{GE} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{HG} + \frac{1}{4} (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE}) && \text{On décompose } \overrightarrow{GE} \text{ pour écrire en fonction de } \overrightarrow{HE} \text{ et } \overrightarrow{HG} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{HG} - \frac{1}{4} \overrightarrow{HG} + \frac{1}{4} \overrightarrow{HE} \\ &= \frac{1}{4} \overrightarrow{HG} + \frac{1}{4} \overrightarrow{HE} \end{aligned}$$

Ainsi $2 \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points C, L et A sont alignés

Exercice 6

Construisons le point D pour conjecturer à partir de la figure

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} &= 2 \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{BA} \\ &\Leftrightarrow 2 \overrightarrow{DA} = 2 \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow -\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$



On conjecture que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} && \text{Idée : faire apparaître } \overrightarrow{AD} \text{ pour pouvoir le remplacer par } \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \vec{0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires donc les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

Exercice 7

Idée : on suppose donnés les trois points K, S, R et on essaye de construire le point T

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KT} + \overrightarrow{KS} &= \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{KR} + \overrightarrow{SR} && \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KT} - \overrightarrow{TK} = \overrightarrow{KR} + \overrightarrow{SR} - \overrightarrow{KS} \\ &&& \Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{KT} + \overrightarrow{KT} = \overrightarrow{KR} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{SK} \\ &&& \Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{KT} = \overrightarrow{SK} + \overrightarrow{KR} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{SR} = 2\overrightarrow{SR} \\ &&& \Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{KT} = 2\overrightarrow{SR} \\ &&& \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KT} = \overrightarrow{SR}\end{aligned}$$

$KTRS$ est un parallélogramme.