

Vecteurs et coordonnées

Exercice 1

Dans un repère, on donne $A(3 ; 5)$, $B(-1 ; 4)$ et $C(0 ; 2)$.

Déterminer les coordonnées des points D et E tels que :

1. $\overrightarrow{AD} = 3 \overrightarrow{AB}$ 2. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + 2 \overrightarrow{BC}$

Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer la valeur du réel m tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$ 2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2m \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Dans un repère, on donne les points $A(-4 ; 2)$, $B(1 ; 1)$ et $C(6 ; 0)$.

Démontrer que ces trois points sont alignés.

Exercice 4

Dans un repère, on donne les points $M(3 ; 4)$, $E(1 ; 0)$ et $G(-6 ; -2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point F tel que : $3 \overrightarrow{FG} = 5 \overrightarrow{EG} + 2 \overrightarrow{ME}$.
2. Démontrer que les droites (EF) et (GM) sont parallèles.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1 ; 5)$ $C(6 ; 4)$ $B(3 ; 2)$ $D(1 ; -1)$ $E(6 ; 0)$

Démontrer que quatre de ces points sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 6

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1 ; 5)$ $B(1 ; 3)$ $C(-3 ; 4)$

- Trouver une équation de d , la médiane de ABC issue de B

Correction

Exercice 1

1. Le point D a pour coordonnées $(x; y)$ donc $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \end{pmatrix}$.

On a aussi $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1-3 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ on obtient $\begin{cases} x-3 = -12 \\ y-5 = -3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = -9 \\ y = 2 \end{cases}$

Donc $D(-9; 2)$.

2. Le point E a pour coordonnées $(x; y)$ donc $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0+1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $2\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

D'où $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3+2 \\ -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ on a $\begin{cases} x-3 = -1 \\ y-5 = -8 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$. Donc $E(2; -3)$.

Exercice 2

Rappel de cours

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ ssi $x \times y' - x' \times y = 0$.

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $3 \times 4 - m \times (-1) = 0$ ssi $12 + m = 0$ ssi $m = -12$

donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}$ On peut remarquer que : $\vec{v} = -4\vec{u}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires

2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2m \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $2m \times (-1) - m \times (-5) = 0$ ssi $-2m + 5m = 0$ ssi $3m = 0$

ssi $m = 0$

donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ On peut remarquer que : $\vec{u} = \frac{1}{5}\vec{v}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires

Exercice 3

Méthode Pour démontrer que les points A, B et C sont alignés, il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1+4 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6+4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1^{ère} méthode pour montrer que ces vecteurs sont colinéaires

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, car $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 5 \times (-2) - 10 \times (-1) = -10 + 10 = 0$

2^{nde} méthode pour montrer que ces vecteurs sont colinéaires

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, car on remarque que $\overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{AB}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice 4

Méthode Pour montrer que des droites (AB) et (KL) sont parallèles, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires.

1. On pose $F(x; y)$ et on a alors $\overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} -6-x \\ -2-y \end{pmatrix}$ donc $3 \overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} 3 \times (-6-x) \\ 3 \times (-2-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18-3x \\ -6-3y \end{pmatrix}$.

De plus $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} -6-1 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $5 \overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} -35 \\ -10 \end{pmatrix}$. De même $\overrightarrow{ME} \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $2 \overrightarrow{ME} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Donc $5 \overrightarrow{EG} + 2 \overrightarrow{ME} \begin{pmatrix} -7-4 \\ -2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ -18 \end{pmatrix}$.

Comme $3 \overrightarrow{FG} = 5 \overrightarrow{EG} + 2 \overrightarrow{ME}$ on a $\begin{cases} -18-3x = -39 \\ -6-3y = -18 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} -3x = -21 \\ -3y = -12 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$

Donc F a pour coordonnées $(7; 4)$.

2. $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 7-1 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GM} \begin{pmatrix} -6-3 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$. Montrons que ces deux vecteurs sont colinéaires :

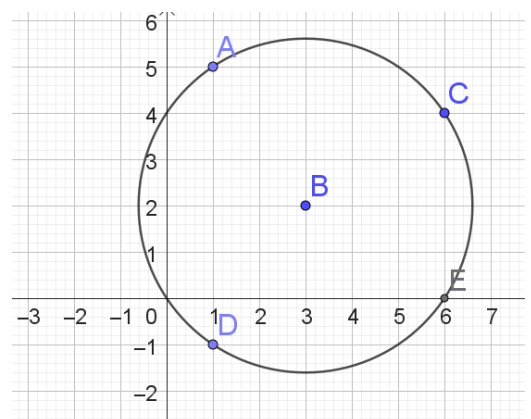
$\det(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{GM}) = 6 \times (-6) - (-9) \times 4 = -36 + 36 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GM}$ sont colinéaires.

Les droites (EF) et (GM) sont donc parallèles.

Exercice 5

Conjecture (deviner la réponse) à l'aide d'un dessin

Il semblerait que A, C, D, E soit sur un même cercle de centre B .



Méthode M est sur le cercle de rayon R et de centre B si et seulement si $BM = R$

Des points sont sur un même cercle si et seulement si leurs distances au centre est la même

$$\overrightarrow{BA}(-2; 3) \quad \text{donc } AB = BA = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BC}(3; 2) \quad \text{donc } BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BD}(-2; -3) \quad \text{donc } BD = \|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BE}(3; -2) \quad \text{donc } BE = \|\overrightarrow{BE}\| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

donc $AB = BC = BD = BE$ donc A, C, D, E sont sur un même cercle de centre B et de rayon $\sqrt{13}$

Exercice 6

On appelle **médiatrice d'un côté** d'un triangle, la droite qui :

- est perpendiculaire à ce côté.
- passe par le milieu de ce côté.

Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle. Le cercle circonscrit au triangle passe par les trois sommets du triangle.

On appelle **hauteur d'un triangle**, une droite qui :

- passe par un des sommets du triangle.
- est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point (appelé orthocentre du triangle).

On appelle **médiane d'un triangle**, une droite qui :

- passe par un des sommets.
- passe par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.

On appelle **bissectrice d'un angle**, la droite qui passe par le sommet B et qui partage l'angle en deux angles de même mesure.

Les trois bissectrices se coupent en un même point appelé centre du cercle inscrit au triangle.

- Trouvons les coordonnées de K milieu de $[AC]$

$$x_K = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2}(-1 + (-3)) = -2 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{1}{2}(y_A + y_C) = \frac{1}{2}(5 + 4) = \frac{9}{2}$$

donc $K\left(-2; \frac{9}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \bullet \quad M \in d & \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BK}) = 0 & \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2-1 \\ y-3 & \frac{9}{2}-3 \end{vmatrix} = 0 & \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ y-3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-1) - (-3)(y-3) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 3y - 9 = 0 \end{aligned}$$

$$d: \frac{3}{2}x + 3y - \frac{21}{2} = 0$$