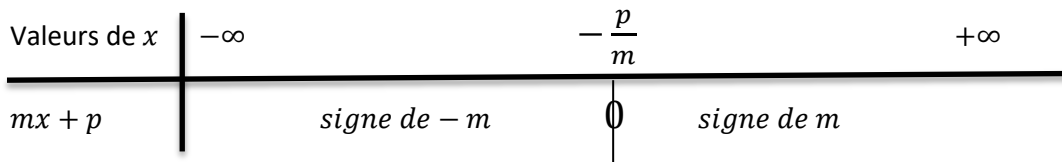
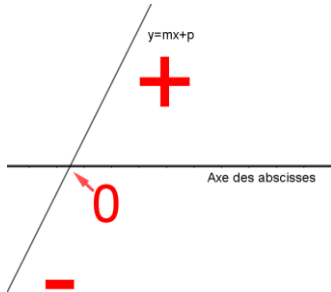
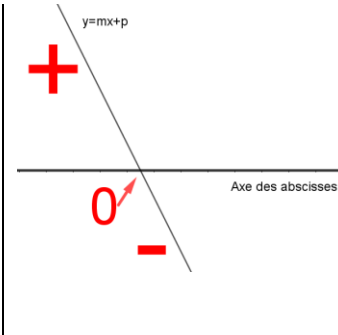


Rappel : signe de $mx + p$ avec $m \neq 0$ **Interprétation graphique**

Cas $m > 0$ (la droite « monte »)
 Dans la ligne du signe de $mx + p$, on aura
 $- \quad 0 \quad +$
 dans cet ordre



Cas $m < 0$ (la droite « descend »)
 Dans la ligne du signe de $mx + p$, on aura
 $+ \quad 0 \quad -$
 dans cet ordre

Ex 1 Dresser le tableau de signes de $Z(x) = -3x + 5$ $W(x) = 6x + 2$ $Y(x) = (3x - 4)^2 - 25x^2$

Polynômes

Il est commode parfois d'utiliser le mot « polynôme » :

$ax + b$ avec $a \neq 0$

est un *polynôme du premier degré*

$ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

est un *polynôme du second degré* (on dit aussi *trinôme du second degré*)

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$

est un *polynôme du troisième degré*

... et ainsi de suite ...

Par exemple : $6x^3 - 5x^2 + 2$ est une fonction polynôme du troisième c
 avec $a = 6$ (on a bien $a \neq 0$) $b = -5$ $c = 0$ $d = 2$

Racine d'un polynôme

On appelle racine d'un polynôme, appelons le $P(x)$, une solution de l'équation $P(x) = 0$

Ex 2 Trouver les racines de $A(x) = 25x^2 - 5x + \frac{1}{4}$ $B(x) = -16x^2 + 36$ $C(x) = 4x^3 - 8x$ $D(x) = x^2 - 2$

Apprendre par cœur : le discriminant

Le discriminant d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
 est le nombre $b^2 - 4ac$. On le note avec la lettre majuscule grecque Δ (on prononce « delta »).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

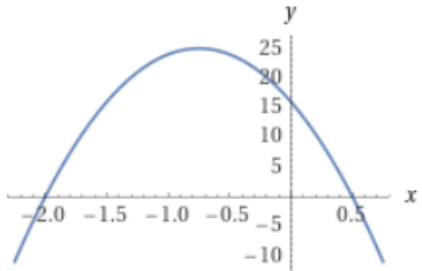
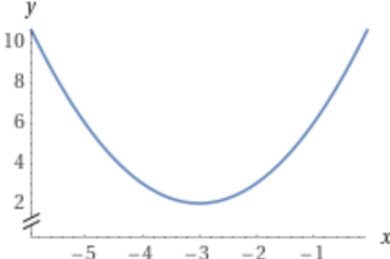
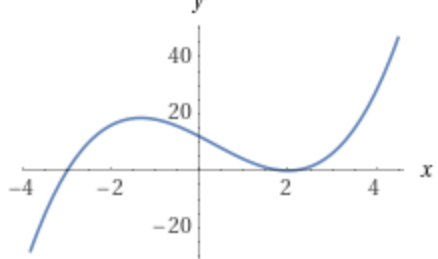
Ex 3 Calculer le discriminant de : $A(x) = 8x + x^2 + 3$ $B(x) = x - x^2$ $C(x) = -3x^2 - 4x - 1$

Utilité du discriminant

Discriminer veut dire distinguer, différencier. En regardant son signe, on peut savoir combien de solutions a l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Quand $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Quand $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution $-\frac{b}{2a}$
- Quand $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Ex 4 Donner et justifier (si possible) le **signe** du discriminant de $f(x)$

$f(x) = (-7x + \pi)((4 - \sqrt{7})x + \sqrt{11})$	f est la fonction polynôme du second degré dont la représentation graphique est 
f est la fonction polynôme du second degré dont la représentation graphique est 	f est la fonction dont la représentation graphique est 

Le cas $\Delta > 0$: par-cœur

Dans le cas où $\Delta > 0$

- Le polynôme a deux racines (solutions de $ax^2 + bx + c = 0$) que l'on appelle souvent x_1 et x_2 . Pour les calculer, on utilise les formules $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Le polynôme se factorise $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Le tableau de signes est sur le modèle

Valeurs de x	$-\infty$	$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ <i>plus petite racine</i>	$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ <i>plus grande racine</i>	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	$\emptyset$	signe de $-a$	signe de a

Ex 5 Calculatrice interdite Dresser le tableau de signes de $T(x) = -x^2 - 2x + 2$ et de $U(x) = 9x^2 - 5$

Ex 6 Calculatrice interdite Trouver les racines de
 $P(x) = -3x^2 + 2x + 5$ $N(x) = 5x^2 + 11x$ $M(x) = -x^2 + 31$

Le cas $\Delta = 0$: par-cœur

Dans le cas où $\Delta = 0$

- Le polynôme a une seule racine $\alpha = -\frac{b}{2a}$. C'est dire que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution.
- Le polynôme se factorise $f(x) = a(x - \alpha)^2$
- Le tableau de signes est sur le modèle

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		0	
	signe de a		signe de a

Ex 7 Résoudre $36x^2 - 84x + 49 \leq 0$

Le cas $\Delta < 0$: par-cœur

Dans le cas où $\Delta < 0$

- Le polynôme n'a pas de racine. C'est dire que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution.
- Le polynôme ne se factorise pas
- Le tableau de signes est sur le modèle

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		
	toujours du signe de a (et ne s'annule pas)	

Ex 8 Dresser le tableau de signes de $T(x) = -3x - x^2 - 4$ $R(x) = -315x^2 - 91$

Exercice 1 Comme en seconde

Dresser le tableau de signes de $Z(x) = -3x + 5$ $W(x) = 6x + 2$ $Y(x) = (3x - 4)^2 - 25x^2$

Signes de $Z(x)$

Valeurs de x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$-3x + 5$		0	
forme $mx + p$ avec $m = -3$			
		+	-
		signe de $-m$	signe de m

Signes de $W(x)$

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$6x + 2$		0	
forme $mx + p$ avec $m = 6$			
		-	+
		signe de $-m$	signe de m

Signes de $Y(x)$

$$Y(x) = (3x - 4)^2 - (5x)^2 = ((3x - 4) + 5x)((3x - 4) - 5x) = (8x - 4)(-2x - 4)$$

Valeur de x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
Signe de $8x - 4$	$-$		0	$+$	
forme $mx + p$ avec $m = 8$	signe de $-m$			signe de m	
Signe de $-2x - 4$	$+$	0	$-$	$-$	
forme $mx + p$ avec $m = 6$	signe de $-m$		signe de $-m$	signe de m	
Signe de $Y(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

A savoir

Le discriminant d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est $\Delta = b^2 - 4ac$

Discriminer veut dire distinguer, différencier. En regardant son signe, on peut savoir combien de solutions a l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Quand $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Quand $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution $-\frac{b}{2a}$
- Quand $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Exercice 2 : savoir trouver des racines

Question $A(x) = 25x^2 - 5x + \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} A(x) = 0 &\Leftrightarrow 25x^2 - 5x + \frac{1}{4} = 0 &\Leftrightarrow (5x)^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0 &\Leftrightarrow \left(5x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - \frac{1}{2} = 0 &\Leftrightarrow 5x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{5} \times 5x = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$A(x)$ a une seule racine $\frac{1}{10}$

Question $B(x) = -16x^2 + 36$

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow -16x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow 6^2 - (4x)^2 = 0 \Leftrightarrow (6 + 4x)(6x - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

$B(x)$ a deux racines $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$

Question $C(x) = 4x^3 - 8x$

$$\begin{aligned} C(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - \sqrt{2}^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \text{ ou } x + \sqrt{2} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$C(x)$ a trois racines 0, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$

Question $D(x) = x^2 - 2$

$$\begin{aligned} D(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2}^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{2} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Les nombres « **racine carrée** de 2 » et « **- racine carrée** de 2 » sont les deux « **racines du polynôme** $D(x)$ »

C'est dans ce lien historique avec les « *racines carrées* » qu'a été puisée l'expression « *racine d'un polynôme* ».

De même $\sqrt{3}$ (qui se dit « *racine carrée de 3* ») est une « *racine du polynôme* $x^2 - 3$ »

Exercice 3 : savoir calculer un discriminant

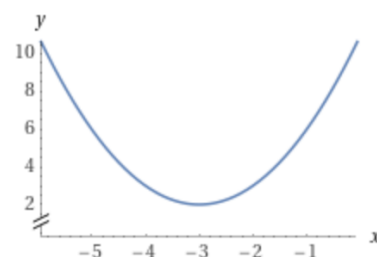
- $A(x) = 8x + x^2 + 3$ on reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$ $b = 8$ $c = 3$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 1 \times 3 = 52$
- $B(x) = x - x^2$ on reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$ $b = 1$ $c = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 0 = 1$
- $C(x) = -3x^2 - 4x - 1$ on reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$ $b = -4$ $c = -1$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = 4$

Exercice 4 : signe d'un déterminant

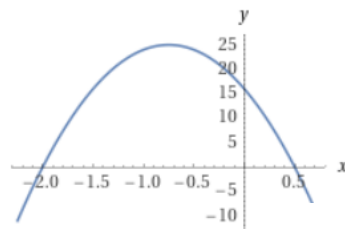
- $f(x) = (-7x + \pi)((4 - \sqrt{7})x + \sqrt{11})$
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow (-7x + \pi)((4 - \sqrt{7})x + \sqrt{11}) = 0 \Leftrightarrow -7x + \pi = 0 \text{ ou } (\sqrt{17} + 1)x + \sqrt{11} = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{11}}{\sqrt{17}+1}$

D'après le théorème du produit nul, $f(x) = 0$ va avoir deux solutions distinctes
on dit que le polynôme $f(x)$ a deux racines distinctes donc $\Delta > 0$

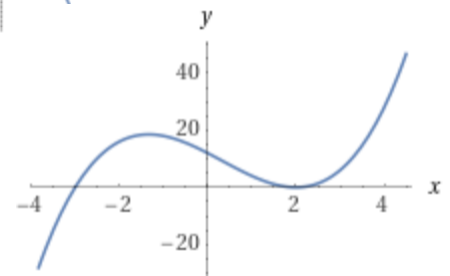
- La courbe C_f ne coupe pas l'axe des abscisses
donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution
on dit que $f(x)$ n'a aucune racine
donc $\Delta < 0$



- La courbe C_f coupe deux fois l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution on dit que $f(x)$ n'a aucune racine
donc $\Delta < 0$



- La courbe n'est pas une parabole !
donc f n'est pas une fonction polynôme du second degré
(on n'est même pas certain que f soit une fonction polynôme donc on ne parle pas de racine)
Le discriminant n'étant pas défini, on ne peut pas parler de son signe !



Exercice 5 : Application directe pour $\Delta > 0$

Dans le cas où $\Delta > 0$

- Le polynôme a deux racines (solutions de $ax^2 + bx + c = 0$) que l'on appelle souvent x_1 et x_2
Pour les calculer, on utilise les formules $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Le polynôme se factorise $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Le tableau de signes est sur le modèle

A savoir

Valeurs de x	$-\infty$		<i>plus petite racine</i>		<i>plus grande racine</i>		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a		

Question $T(x) = -x^2 - 2x + 2$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$ $b = -2$ $c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times (2) = 12$$

- Comme $\Delta > 0$, $T(x)$ a deux racines (on peut dire aussi « $T(x) = 0$ a deux solutions »)

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{12}}{2 \times (-1)} = \frac{2-\sqrt{4 \times 3}}{-2} = \frac{(2-\sqrt{4 \times 3})}{-2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{12}}{2 \times (-1)} = \frac{2+\sqrt{4 \times 3}}{-2} = \frac{(2+\sqrt{4 \times 3})}{-2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{-2} = -1 - \sqrt{3}$$

- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$		$-1 - \sqrt{3}$		$-1 + \sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $-x^2 - 2x + 2$ forme $ax^2 + b + c$ avec $a = -1$	—	0	+	0	—		
	signe de a		signe de $-a$		signe de a		

Question $U(x) = (3x)^2 - \sqrt{5}^2 = (3x + \sqrt{5})(3x - \sqrt{5})$

$$U(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + \sqrt{5} = 0 \text{ ou } 3x - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Comme $U(x)$ a deux racines, $\Delta > 0$

Passer par le discriminant ($\Delta = 0^2 - 4 \times 9 \times (-5) = 180$) est possible mais long ... donc à éviter !

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$+\infty$
Signe de $9x^2 - 5$	+	0	0	+
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = 9$	signe de a		signe de $-a$	signe de a

Remarque : pour trouver les racines de $U(x)$, on pourrait calculer le discriminant puis appliquer les formules.

Exercice 6 Trouver des racines d'un trinôme du second degré

Question $P(x) = -3x^2 + 2x + 5$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$ $b = 2$ $c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times (-3) \times (5) = 64$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times (-3)} = \frac{-2 - 8}{-6} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times (-3)} = \frac{-2 + 8}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$$

$P(x)$ a deux racines $\frac{5}{3}$ et -1

dit autrement: « l'équation $P(x) = 0$ a deux solutions $\frac{5}{3}$ et -1 »

Question $N(x) = 5x^2 + 11x = 5 \times x \times x + 11 \times x = x(5x + 11)$

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 5x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{11}{5}$$

$N(x)$ a deux racines 0 et $-\frac{11}{5}$

Pour ces deux questions, on pourrait calculer le discriminant puis utiliser les formules mais cela est plus long !!!

Question $M(x) = -x^2 + 31$

$$M(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 31 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = -31 \Leftrightarrow x^2 = 31 \Leftrightarrow x = \sqrt{31} \text{ ou } x = -\sqrt{31}$$

$M(x)$ a deux racines $-\sqrt{31}$ et $\sqrt{31}$

Exercice 7 Résoudre $36x^2 - 84x + 49 \leq 0$

Dans le cas où $\Delta = 0$

- Le polynôme a une seule racine $\alpha = -\frac{b}{2a}$. C'est dire que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution.
- Le polynôme se factorise $f(x) = a(x - \alpha)^2$
- Le tableau de signes est sur le modèle

A savoir

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

Méthode rapide

$$36x^2 - 84x + 49 = (6x)^2 - 2 \times 6x \times 7 + 7^2 = (6x - 7)^2$$

$$36x^2 - 84x + 49 = 0 \Leftrightarrow (6x - 7)^2 = 0 \Leftrightarrow 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}$$

Comme $36x^2 - 84x + 49$ a une seule racine, $\Delta = 0$

Avec les formules

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 36$ $b = -84$ $c = 49$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-84)^2 - 4 \times (36) \times (49) = 0$$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme $36x^2 - 84x + 49$ a une seule racine : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{84}{2 \times (36)} = -\frac{2 \times 6 \times 7}{2 \times 6 \times 6} = \frac{7}{6}$

Remarque dans $36x^2 - 84x + 49$, le cas $\Delta = 0$, les deux formules donnent le même résultat

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

On désigne parfois cette « racine double » par la lettre α : la première lettre de l'alphabet grec

α se prononce « alpha ». La deuxième lettre se note β et se prononce « bêta » : la concaténation des deux a formé le mot « alphabet ».

Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
Signe de $36x^2 - 84x + 49$ forme $ax^2 + b + c$ avec $a = -1$		0	
		signe de a	signe de a

Solutions de $36x^2 - 84x + 49 \leq 0$ L'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{7}{6} \right\}$

Exercice 8

Dans le cas où $\Delta < 0$

- Le polynôme n'a pas de racine. C'est dire que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution.
- Le polynôme ne se factorise pas
- Le tableau de signes est sur le modèle

A savoir

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	toujours du signe de a (et ne s'annule pas)	

Question $T(x) = -3x - x^2 - 4 = -x^2 - 3x - 4$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$ $b = -3$ $c = -4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 9 - 16 = -7$$

Comme $\Delta < 0$, $T(x)$ n'a pas de racine

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $-3x - x^2 - 4$ forme $ax^2 + b + c$ avec $a = -1$	— signe de a	

Question $R(x) = -315x^2 - 91$

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow -315x^2 - 91 = 0 \Leftrightarrow -315x^2 = 91 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{91}{315}$$

Un carré étant toujours positif (ou nul), $R(x)$ n'a pas de racine et donc $\Delta < 0$

Remarque : on aurait pu aussi calculer $\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(-315)(-91) = -114\,660$

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $-315x^2 - 91$ forme $ax^2 + b + c$ avec $a = -315$	— signe de a	