

Savoir-faire

Ex 9 Pour chacune des expressions suivantes, donner les racines (si elles existent), la factorisation (si elle existe), le tableau de signes

$$D(x) = 3x^2 - 15x + 12$$

$$E(x) = -5x^2 + 3x + 2$$

$$F(x) = -2x^2 - 28x - 98$$

$$G(x) = 2x^2 - x + 9$$

$$H(x) = -2x^2 + 2x + 24$$

$$I(x) = 5x + x^2 + 6$$

$$J(x) = 6 - 5x + x^2$$

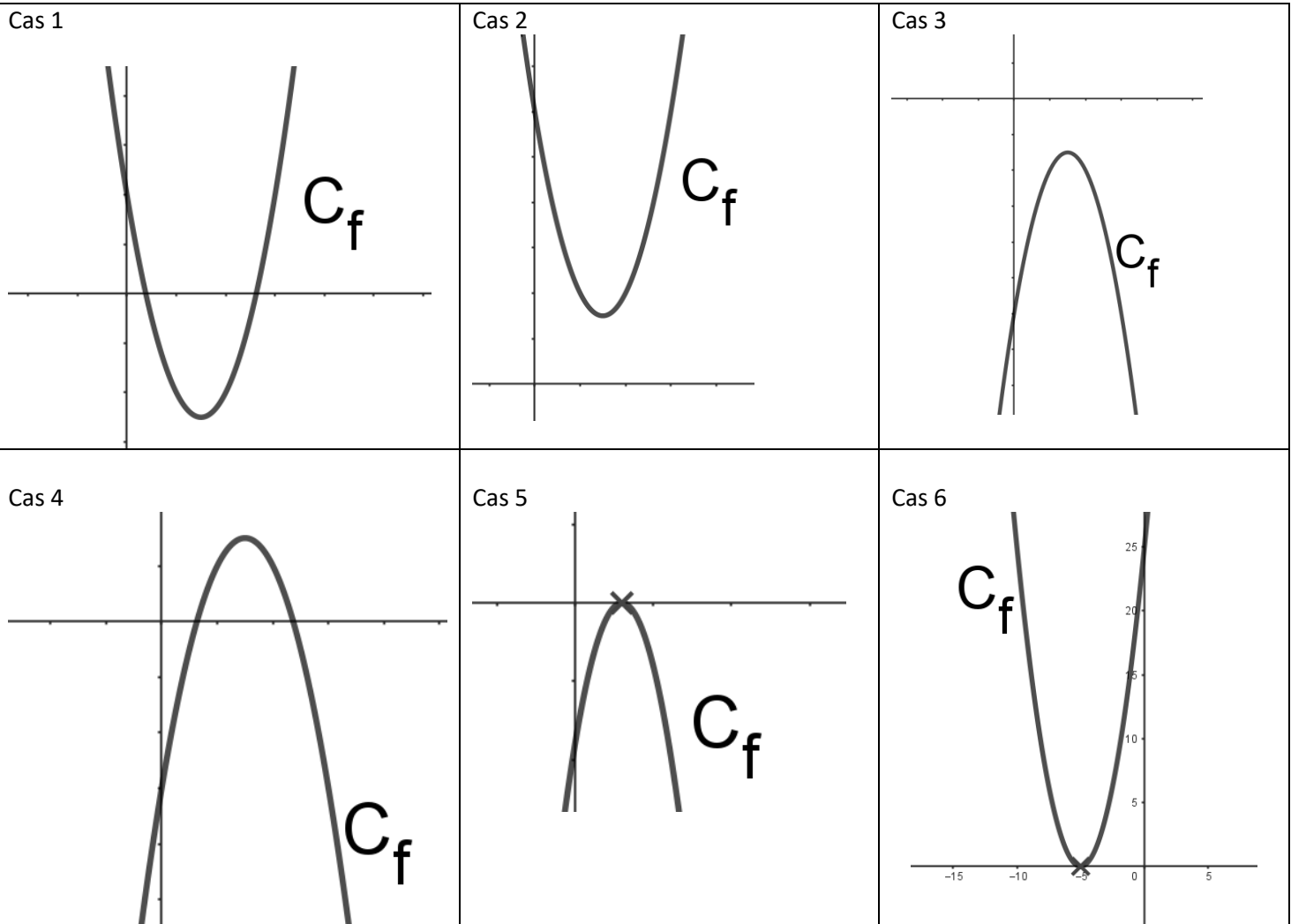
$$K(x) = x^2 + x$$

$$L(x) = x^2 + x - 1$$

Ex 10 Résoudre $6x^2 - 13x - 28 = 0$ $6x^2 - 13x - 28 > 0$ $6x^2 - 13x - 28 \leq 0$

Ex 11 Résoudre $6x^2 + 4x = -10$ $11x^2 = -48x + 35$ $-9x^2 + 30x - 25 \leq 0$

Ex 12 f une fonction telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note C_f sa parabole représentative.
Dans chaque cas, donner le signe de Δ et le signe de a . Expliquer.



Exercice 9

Question $D(x) = 3x^2 - 15x + 12$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$ $b = -15$ $c = 12$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 81$$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-15) - \sqrt{81}}{2 \times 3} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-15) + \sqrt{81}}{2 \times 3} = 4$$

- Comme $\Delta > 0$, le polynôme se factorise $D(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - 1)(x - 4)$

- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de $3x^2 - 15x + 12$		+	0	-	0	+	
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = 3$		signe de a		signe de $-a$		signe de a	

Question $E(x) = -5x^2 + 3x + 2$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -5$ $b = 3$ $c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 49$$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \times (-5)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \times (-5)} = -\frac{2}{5}$$

- Comme $\Delta > 0$, le polynôme se factorise $E(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -5(x - 1)\left(x + \frac{2}{5}\right)$

- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
Signe de $-5x^2 + 3x + 2$		-	0	+	0	-	
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = -5$		signe de a		signe de $-a$		signe de a	

Question $F(x) = -2x^2 - 28x - 98$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$ $b = -28$ $c = -98$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4 \times (-2) \times (-98) = 0$$

- Comme $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-28)}{2 \times (-2)} = -7$

- Comme $\Delta = 0$, le polynôme se factorise $F(x) = a(x - \alpha)^2 = -2(x - (-7))^2 = -2(x + 7)^2$

- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	-7	$+\infty$
Signe de $-2x^2 - 28x - 98$	—	0	—
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = -2$	signe de a		signe de a

Remarque : quand on obtient $\Delta = 0$... on aurait pu utiliser $a^2 + 2ab + b^2$ et $a^2 - 2ab + b^2$
 $F(x) = -2(x^2 + 14x + 49) = -2(x^2 + 2 \times 7 \times x + 7^2) = -2(x + 7)^2$

Question $G(x) = 2x^2 - x + 9$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$ $b = -1$ $c = 9$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 9 = -71$

- Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution
- Comme $\Delta < 0$, le polynôme ne se factorise pas
- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $2x^2 - x + 9$		+
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = 2$		signe de a

Question $H(x) = -2x^2 + 2x + 24$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$ $b = 2$ $c = 24$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-2) \times 24 = 196$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{196}}{2 \times (-2)} = 4$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{196}}{2 \times (-2)} = -3$
- Comme $\Delta > 0$, le polynôme se factorise $H(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -2(x + 3)(x - 4)$
- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
Signe de $-2x^2 + 2x + 24$	$-$	0	$+$	0	$-$
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = -2$	signe de a		signe de $-a$		signe de a

Question $I(x) = 6 - 5x + x^2$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$ $b = -5$ $c = 6$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$
- Comme $\Delta > 0$, le polynôme se factorise $I(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = (x - 2)(x - 3)$

- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
Signe de $6 - 5x + x^2$	+	0	-	+
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = 1$	signe de a		signe de $-a$	signe de a

Question $J(x) = 5x + x^2 + 6$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$ $b = 5$ $c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = -2$$

- Comme $\Delta > 0$, le polynôme se factorise $J(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = (x + 2)(x + 3)$

- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
Signe de $5x + x^2 + 6$	+	0	-	+
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = 1$	signe de a		signe de $-a$	signe de a

Question $K(x) = x^2 + x$

On peut calculer Δ on trouve $\Delta = 1$ puis on calcule $x_1 = -1$ et $x_2 = 0$

Ci-dessous une autre démarche possible ... **à privilégier.**

- $K(x) = x(x + 1)$ d'après le théorème du produit nul, $K(x)$ s'annule pour $x = 0$ ou $x = -1$
Dit autrement, $K(x)$ a deux racines 0 et -1 Donc $\Delta > 0$

- On a déjà trouvé la forme factorisée $K(x) = x(x + 1)$

- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
Signe de $x^2 + x$	+	0	-	+
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = 1$	signe de a		signe de $-a$	signe de a

Question $L(x) = x^2 + x - 1$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$ $b = 1$ $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

- Comme $\Delta > 0$, le polynôme se factorise

$$L(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

- Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
Signe de $x^2 + x - 1$		0	0	
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = 1$	+	—	+	
	signe de a	signe de $-a$	signe de a	

Exercice 10 : Savoir résoudre une équation avec le second degré

1) Résoudre $6x^2 - 13x - 28 = 0$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 6$ $b = -13$ $c = -28$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 6 \times (-28) = 841$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)-\sqrt{841}}{2 \times 6} = -\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)+\sqrt{841}}{2 \times 6} = \frac{7}{2}$$

2) Résoudre $6x^2 - 13x - 28 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le tableau de signes est

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
Signe de $5x + x^2 + 6$		0	0	
forme $ax^2 + b + c$ avec $a = 1$	+	—	+	
	signe de a	signe de $-a$	signe de a	

Pour résoudre $6x^2 - 13x - 28 > 0$, on cherche dans la dernière ligne les signes + (0 non compris)

Puis on lit les valeurs de x correspondantes.

L'ensemble des solutions est : $] -\infty ; -\frac{4}{3} [\cup] \frac{7}{2} ; +\infty [$

3) Résoudre $6x^2 - 13x - 28 \leq 0$

Il est inutile de refaire le tableau de signe car c'est le même !

Cette fois, on cherche dans la dernière ligne les signes — (0 compris)

Puis on lit les valeurs de x correspondantes.

L'ensemble des solutions est : $\left[-\frac{4}{3} ; \frac{7}{2}\right]$

Exercice 11 : Savoir résoudre une équation ou une inéquation du second degré

1) Résoudre $6x^2 + 4x = -10$

$$6x^2 + 4x = -10 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 + 4x + 10 = 0 \quad (\text{on met l'équation sous la forme du théorème})$$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 6$ $b = 4$ $c = 10$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 6 \times 10 = -224$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution.

2) Résoudre $11x^2 = -48x + 35$

$$11x^2 = -48x + 35 \Leftrightarrow 6x^2 + 48x - 35 = 0 \quad (\text{on met l'équation sous la forme du théorème})$$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 6$ $b = 48$ $c = -35$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 48^2 - 4 \times 6 \times (-35) = 3844$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-48 - \sqrt{3844}}{2 \times 6} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-48 + \sqrt{3844}}{2 \times 6} = \frac{7}{11}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{-5 ; \frac{7}{11}\right\}$

3) Résoudre $-9x^2 + 30x - 25 \leq 0$

On reconnaît la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -9$ $b = 30$ $c = -25$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \times (-9) \times (-25) = 0$$

Comme $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution $\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{30}{2 \times (-9)} = \frac{5}{3}$

Le tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
Signe de $-9x^2 + 30x - 25$ forme $ax^2 + b + c$ avec $a = -9$	—	0	—
	signe de a		signe de a

Donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{R} =] - \infty ; + \infty [$

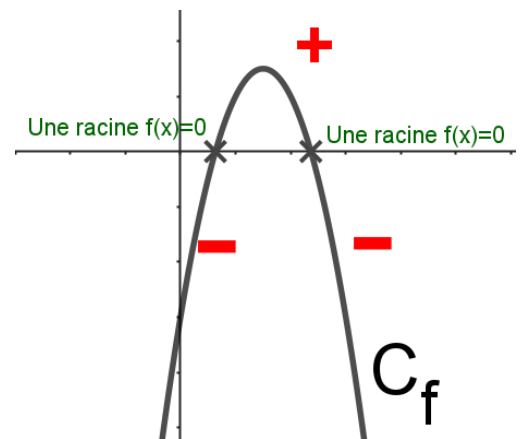
Exercice 12 :

Cas 1 Première constatation

C_f coupe l'axe des abscisses en deux points

donc l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions :

on dit que $f(x)$ a deux racines donc $\Delta > 0$



Deuxième constatation

On peut lire graphiquement le tableau de signes de $f(x)$

Valeurs de x	$-\infty$	plus petite racine		plus grande racine	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	—	0	+	0	—
Le cours dit	signe de a		signe de $-a$		signe de a

donc $a < 0$

Cas 2 Première constatation

C_f ne coupe pas l'axe des abscisses

donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions :

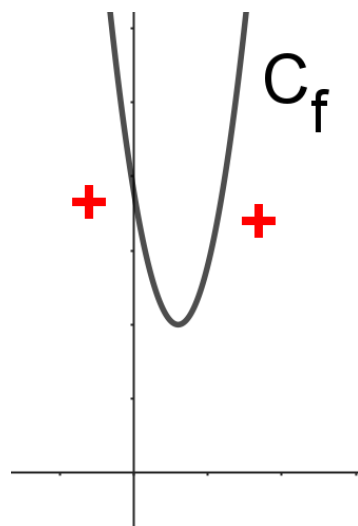
on dit que $f(x)$ n'a pas de racine

donc $\Delta < 0$

Deuxième constatation

On peut lire graphiquement le tableau de signes de $f(x)$

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	+	
Le cours dit	signe de a	

**Cas 3 Première constatation**

C_f ne coupe pas l'axe des abscisses

donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions :

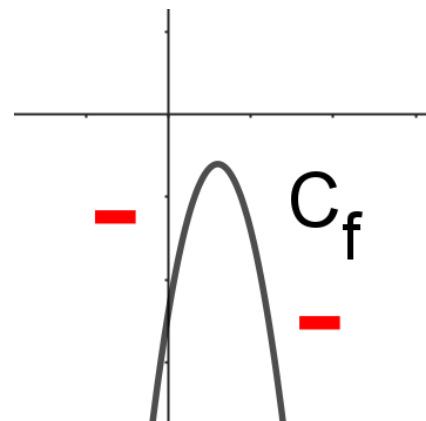
on dit que $f(x)$ n'a pas de racine

donc $\Delta < 0$

Deuxième constatation

On peut lire graphiquement le tableau de signes de $f(x)$

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	-	
Le cours dit	signe de a	



donc $a < 0$

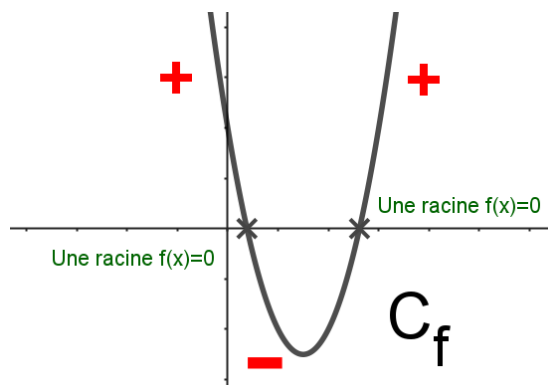
Cas 4 Première constatation

C_f coupe l'axe des abscisses en deux points

donc l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions :

on dit que $f(x)$ a deux racines

donc $\Delta > 0$



Deuxième constatation

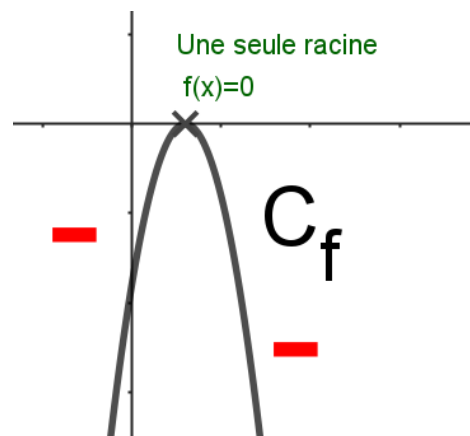
On peut lire graphiquement le tableau de signes de $f(x)$

Valeurs de x	$-\infty$	plus petite racine		plus grande racine		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		+	0	-	0	+
Le cours dit		signe de a		signe de $-a$		signe de a

donc $a > 0$

Cas 5 Première constatation

C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point
donc l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution :
on dit que $f(x)$ a une seule racine
donc $\Delta = 0$



Deuxième constatation

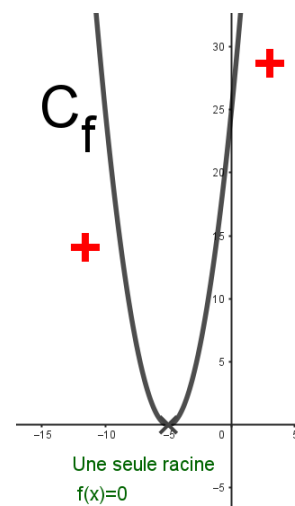
On peut lire graphiquement le tableau de signes de $f(x)$

Valeurs de x	$-\infty$	unique racine		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		-	0	-
Le cours dit		signe de a		signe de a

donc $a < 0$

Cas 6 Première constatation

C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point
donc l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution :
on dit que $f(x)$ a une seule racine
donc $\Delta = 0$



Deuxième constatation

On peut lire graphiquement le tableau de signes de $f(x)$

Valeurs de x	$-\infty$	unique racine		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		+	0	+
Le cours dit		signe de a		signe de a

donc $a > 0$