

**Exercice 1**

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Que désigne-t-on par $\mathbb{N}$ ? par $\mathbb{Z}$ ?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 2 | <p>Soit <math>e</math> un réel strictement positif fixé, écrire <b>si possible</b> sous la forme <math>a \times q^k</math> avec <math>a</math> et <math>q</math> réels et <math>k</math> un entier</p> $a(n) = 8e^{n+2} \times 2e^n \qquad b(n) = 2e^{n+3} + 3e^n \qquad c(n) = 4e^{n-1} + 2e^n$ $d(n) = (3e^n)^3 \qquad e(n) = \sqrt{5}e^n + 3e^n \qquad f(n) = \frac{1}{4 \times e^n}$ |
| 3 | Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par : $f(n) = \frac{n}{n+3}$ Ecrire $f(n+1)$ en fonction de $n$                                                                                                                                                                                                                                                                            |

**Exercice 2** Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{-x^2+12x+8}{4}$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $f(n) = \frac{-n^2+12n+8}{4}$

- 1) Calculer, si possible,  $f(3)$  et  $g(3)$
- 2) Calculer, si possible,  $f(-1)$  et  $g(-1)$
- 3) Calculer, si possible,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $g\left(\frac{1}{2}\right)$
- 4) Représenter graphiquement la fonction  $f$  pour  $n \in [0; 17]$
- 5) Sur le même graphique, représenter graphiquement la fonction  $g$

**Exercice 3**

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $f(n) = n^2 - 2n$

- a) Calculer  $f(0)$ ;  $f(1)$ ;  $f(2)$
- b) Ecrire  $f(n+1)$  en fonction de  $n$

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $n$  par  $\begin{cases} g(0) = 5 \\ g(n+1) = g(n) + 2n \end{cases}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  Calculer  $g(0)$ ;  $g(1)$ ;  $g(2)$ ;  $g(5)$

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $f(n) = 5 + 3n$

- a) Donner, si possible, les images de  $-2$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$  et  $2,5$
- b) Ecrire  $f(2n)$  en fonction de  $n$
- c) Ecrire  $f(n+1)$  en fonction de  $n$
- d) Ecrire  $f(n+1)$  en fonction de  $f(n)$
- e) Calculer  $f(n+1) - f(n)$
- f) On choisit de noter  $u_n$  le nombre  $f(n)$   
Réécrire l'énoncé en utilisant cette notation

**Exercice 5**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $g(n) = 3^n$

- a) Donner, si possible, les images de  $-2$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$  et  $2,5$
- b) Ecrire  $g(2n)$  en fonction de  $n$
- c) Ecrire  $g(n+1)$  en fonction de  $n$
- d) Ecrire  $g(n+1)$  en fonction de  $g(n)$
- e) Calculer le coefficient multiplicateur de  $g(n)$  à  $g(n+1)$
- f) On choisit de noter  $v_n$  le nombre  $g(n)$   
Réécrire l'énoncé en utilisant cette notation

**Exercice 6**

- 1) Calculer

$$A = \sum_{n=0}^4 \sqrt{n}$$

$$B = \sum_{k=0}^3 2^{-k}$$

$$C = \sum_{p=1}^5 3^p - \sum_{k=0}^4 3^k$$

- 2) Ecrire une fonction Python qui calcule

$$\sum_{i=0}^n 3^i$$

## Définition de $a^{-n}$ ? de $a^0$ ? formules ?

Ne pas confondre  $2^{-3}$  avec  $2 \times 10^{-3}$  surtout que certaines calculatrices écrivent  $2^{-03}$  pour  $2 \times 10^{-3}$

Considérons le tableau sur fond bleu

| $n$   | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7   | 8   | 9   | 10   |
|-------|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|------|
| $2^n$ | ?  | ?  | ?  | ? | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |

Pour passer d'une colonne à celle de droite, on multiplie par 2

Cela traduit la propriété  $2^{n+p} = 2^n \times 2^p$  avec  $n$  et  $p$  entiers naturels non nuls.

Les définitions de  $a^{-n}$  et de  $a^0$  ont été posées pour conserver la propriété  $2^{n+p} = 2^n \times 2^p$  avec des entiers **relatifs**. Cela revient à conserver la logique du tableau : pour passer d'une colonne à celle de gauche, on multiplie par  $\frac{1}{2}$  (et pour passer d'une colonne à celle de droite, on multiplie par 2).

| $n$   | -3                                                                  | -2                                               | -1                                   | 0                          | 1 | 2 | 3 | 4  |
|-------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|---|---|---|----|
| $2^n$ | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ | $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ | $2 \times \frac{1}{2} = 1$ | 2 | 4 | 8 | 16 |

Ainsi :  $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$      $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$      $2^{-1} = \frac{1}{2}$     puis généralement  $2^0 = 1$      $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$      $e^{-1} = \frac{1}{e}$

### Définition :

Soit  $a$  un réel non nul et  $n$  un entier naturel non nul. On pose :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### Propriétés

$a$  et  $b$  des réels non nuls.  $n$  et  $p$  des entiers relatifs.

- Des formules avec la « même base »  $a$

$$(a^n)^p = a^{n \times p}$$

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

- Des formules avec le même exposant

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- Attention, pas de formules simples avec les additions / soustractions et les exposants.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \text{ ce n'est pas simple}$$

pas de formule pour  $a^2 + b^2$  (en se limitant aux nombres réels)

## Exercice 1

### Question 1

$\mathbb{N}$  est l'ensemble des *entiers naturels* :  $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots$

$\mathbb{Z}$  est l'ensemble des *entiers relatifs* :  $\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots$

### Question 2

La forme  $a \times e^k$  veut dire que l'on cherche une écriture sous le modèle : *nombre réel*  $\times$  *réel* <sup>*nombre entier*</sup>

$$a(n) = 8e^{n+2} \times 2e^n$$

$$a(n) = 8e^{n+2} \times 2e^n = 16 \times e^{n+2+n} = 16 \times e^2 \times e^{2n} = 16e^2 \times (e^2)^n$$

$$\text{Formules utilisées : } a^p \times a^n = a^{n+p} \qquad (a^n)^p = a^{n \times p}$$

$$a(n) \text{ est de la forme } a \times e^k \text{ avec } a = 16e^2 \text{ et } q = e^2$$

$$b(n) = 2e^{n+3} + 3e^n$$

$$b(n) = 2e^{n+3} + 3e^n = 2e^n \times e^3 + 3 \times e^n = (2e^3 + 3) \times e^n$$

$$\text{De la forme } a \times e^k \text{ avec } a = 2e^3 + 3 \text{ et } q = e$$

$$c(n) = 4e^{n-1} + 2e^n$$

$$c(n) = 4e^{n-1} + 2e^n = 4 \times e^n \times e^{-1} + 2 \times e^n = (4e^{-1} + 2) \times e^n = \left(\frac{4}{e} + 2\right) e^n$$

$$\text{De la forme } a \times q^n \text{ avec } a = \frac{4}{e} + 2 \text{ et } q = e$$

$$d(n) = (3e^n)^3$$

$$d(n) = (3e^n)^3 = 3e^n \times 3e^n \times 3e^n = 27 \times e^{n+n+n} = 27 \times e^{3n} = 27 \times (e^3)^n$$

$$\text{De la forme } a \times q^n \text{ avec } a = 27 \text{ et } q = e^3$$

$$e(n) = \sqrt{5}e^n + 3e^n$$

$$e(n) = \sqrt{5}e^n + 3e^n = (\sqrt{5} + 3)e^n$$

$$\text{De la forme } a \times q^n \text{ avec } a = \sqrt{5} + 3 \text{ et } q = e$$

$$f(n) = \frac{1}{4 \times 3^n}$$

$$f(n) = \frac{1}{4 \times 3^n} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{De la forme } a \times q^n \text{ avec } a = \frac{1}{4} \text{ et } q = \frac{1}{3}$$

### Question 3

Remarque :  $f(n) = \frac{n}{n+3}$  se lit  $f(\text{entier}) = \frac{\text{entier}}{\text{entier}+3}$

ici va remplacer *entier* par  $(n+1)$  ... en n'oubliant pas les parenthèses pour bien conserver les priorités éventuelles.

$$f(n+1) = \frac{(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{n+1}{n+4}$$

## Exercice 2

**Question 1**  $f(3) = \frac{-(3)^2 + 12(3) + 8}{4} = \frac{35}{4}$  et  $g(3) = \frac{-(3)^2 + 12(3) + 8}{4} = \frac{35}{4}$

**Question 2** *Rappel : l'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres qui ont une image.*

$-1 \notin [0 ; +\infty[$  donc  $g(-1)$  n'existe pas

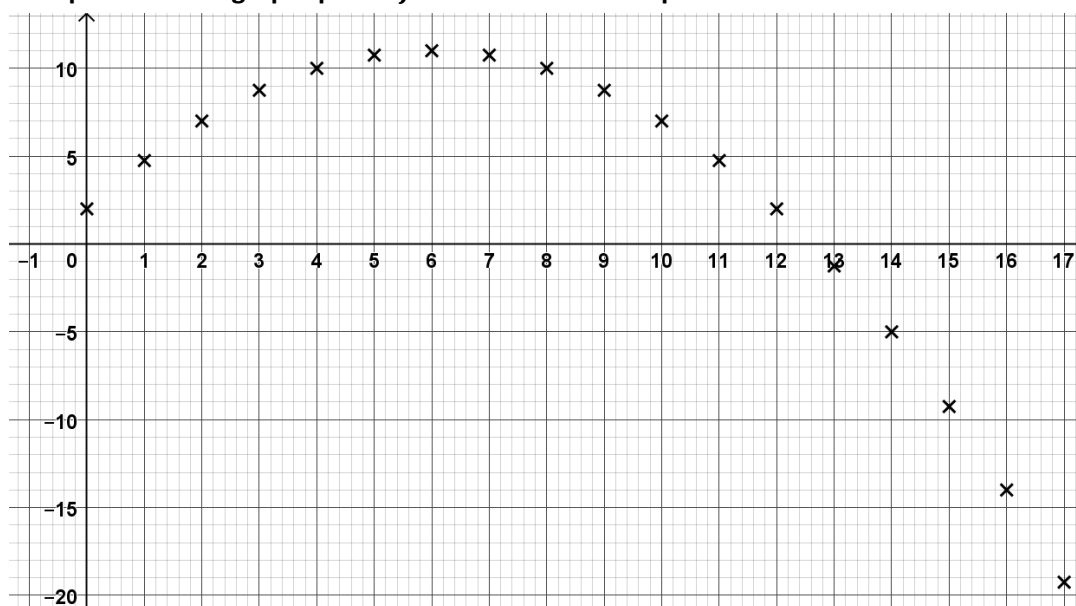
$-1 \notin \mathbb{N}$  donc  $f(-1)$  n'existe pas

**Question 3**  $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{2}\right) + 8}{4} = \frac{-\frac{1}{4} + 6 + 8}{4} = \frac{\frac{55}{4}}{4} = \frac{55}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{55}{16}$   $f\left(\frac{1}{2}\right)$  n'existe pas car  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

### Question 4

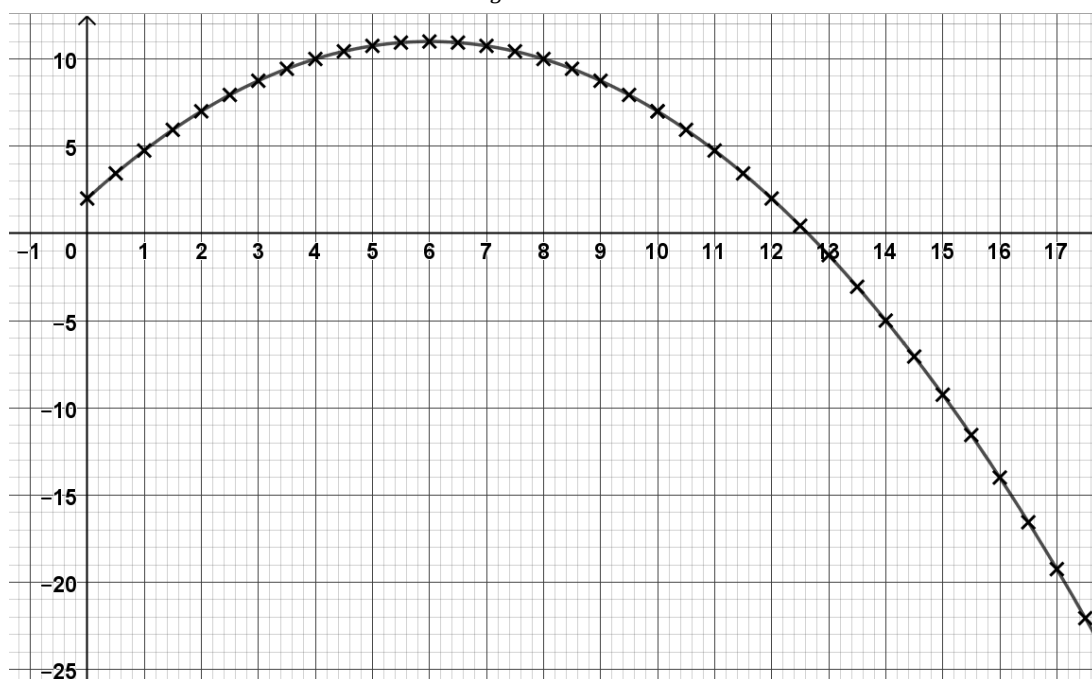
Les points de  $C_f$  sont de la forme  $(n ; f(n))$  où  $n \in \mathbb{N}$

La représentation graphique de  $f$  est donc formée de points isolés d'abscisses entières.



La représentation de la fonction  $g$  est tracée en « continu », sans lever le crayon.

Les points mis sont quelques points de  $C_g$  qui nous servent de guide pour tracer la courbe.



## Exercice 3

### Question 1

a)  $f(0) = 0^2 - 2(0) = 0$        $f(1) = 1^2 - 2(1) = -1$        $f(2) = 2^2 - 2(2) = 0$

b) On peut aussi remarquer que le nom de la variable pourrait être changé :

$$f(k) = k^2 - 2k \quad f(p) = p^2 - 2p \quad f(i) = i^2 - 2i \quad f(j) = j^2 - 2j \quad f(\dots) = \dots^2 - 2 \dots$$

Devant  $f(n) = n^2 - 2n$



On pense  $f(\text{entier}) = (\text{entier})^2 - 2(\text{entier})$



On « remplace » entier per  $(n+1)$  sans oublier les parenthèses



On obtient  $f(n+1) = (n+1)^2 - 2(n+1)$

$$f(n+1) = (n+1)^2 - 2(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 = n^2 - 1$$

### Question 2

$g(0) = 5$       ...      c'est écrit dans la définition ...

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 0$ , on obtient :  $g(0+1) = g(0) + 2(0)$   
Et donc  $g(1) = 5 + 2 \times 0 = 5$

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 1$ , on obtient :  $g(1+1) = g(1) + 2(1)$   
Et donc  $g(2) = 5 + 2 \times 1 = 7$

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 2$ , on obtient :  $g(2+1) = g(2) + 2(2)$   
Et donc  $g(3) = 7 + 2 \times 2 = 11$

**Avec une telle définition, on est obligé de calculer  $g(4)$  pour accéder à  $g(5)$**

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 3$ , on obtient :  $g(3+1) = g(3) + 2(3)$   
Et donc  $g(4) = 11 + 2 \times 3 = 17$

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 4$ , on obtient :  $g(4+1) = g(4) + 2(4)$   
Et donc  $g(5) = 17 + 2 \times 4 = 25$

## Exercice 4

a) Comme  $-2 \notin \mathbb{N}$ ,  $f(-2)$  n'existe pas

$$f(0) = 5 + 3(0) = 5$$

$$f(1) = 5 + 3(1) = 8$$

$$f(2) = 5 + 3(2) = 11$$

Comme  $2,5 \notin \mathbb{N}$ ,  $f(2,5)$  n'existe pas

b)  $f(n) = 5 + 3n$  peut se lire  $f(\dots) = 5 + 3(\dots)$

$$f(2n) = 5 + 3(2n) = 5 + 6n$$

c)  $f(n+1) = 5 + 3(n+1) = 5 + 3n + 3 = 3n + 8$

d)  $f(n+1) = 3n + 8 = 3n + 5 + 3$

Et comme  $f(n) = 5 + 3n$

$$f(n+1) = f(n) + 3$$

e)  $f(n+1) - f(n) = (5n + 8) - (5n + 3) = 5$

Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute 5.

## Exercice 5

a) Comme  $-2 \notin \mathbb{N}$ ,  $g(-2)$  n'existe pas

$$g(0) = 3^0 = 1$$

$$g(1) = 3^1 = 3$$

$$g(2) = 3^2 = 9$$

Comme  $2,5 \notin \mathbb{N}$ ,  $g(2,5)$  n'existe pas

b)  $g(n) = 3^n$  peut se lire  $g(\dots) = 3^{\dots}$

$$g(2n) = 3^{(2n)} = (3^2)^n = 9^n$$

c)  $g(n+1) = 3^{(n+1)} = 3^{n+1}$

d)  $g(n+1) = 3^{n+1} = 3 \times 3^n$

Et comme  $g(n) = 3^n$

$$g(n+1) = 3 g(n)$$

e) Coefficient multiplicateur =  $\frac{\text{Valeur finale}}{\text{Valeur initiale}}$

$$CM = \frac{g(n+1)}{g(n)} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3 \times 3^n}{3^n} = 3$$

Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par 3

### Question f

Au lieu de dire « la fonction  $f$  », on dira « la « suite  $(u_n)$  »  
On ne précise pas que  $n$  est un entier ... c'est implicite avec les suites

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_n = 5 + 3n$  pour  $n \geq 0$

Au lieu de parler « d'image », on parle de « terme »

- Calculer les termes de  $u_0, u_1, u_2$
- Ecrire  $u_{2n}$  en fonction de  $n$
- Ecrire  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$
- Ecrire  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est arithmétique

### Question f

Au lieu de dire « la fonction  $g$  », on dira « la « suite  $(v_n)$  »  
On ne précise pas que  $n$  est un entier ... c'est implicite avec les suites

Soit  $(v_n)$  définie par  $v_n = 3^n$  pour  $n \geq 0$

Au lieu de parler « d'image », on parle de « terme »

- Calculer les termes de  $v_0, v_1, v_2$
- Ecrire  $v_{2n}$  en fonction de  $n$
- Ecrire  $v_{n+1}$  en fonction de  $n$
- Ecrire  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$
- Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique

## Exercice 6

### Question 1

$$A = \sum_{n=0}^4 \sqrt{n}$$

Cette notation désigne  $\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$

- on calcule  $\sqrt{n}$  pour  $n = 0$
- on calcule  $\sqrt{n}$  pour  $n = 1$
- on calcule  $\sqrt{n}$  pour  $n = 2$
- on calcule  $\sqrt{n}$  pour  $n = 3$
- on calcule  $\sqrt{n}$  pour  $n = 4$

puis on ajoute le tout !

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} \\ &= 0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$B = \sum_{k=0}^3 2^{-k}$$

Cette notation désigne  $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$

- on calcule  $2^{-k}$  pour  $k = 0$
- on calcule  $2^{-k}$  pour  $k = 1$
- on calcule  $2^{-k}$  pour  $k = 2$
- on calcule  $2^{-k}$  pour  $k = 3$

puis on ajoute le tout !

$$\begin{aligned} B &= 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

$$C = \sum_{p=1}^5 3^p - \sum_{k=0}^4 3^k$$

$$C = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 - (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = 3^5 - 3^0 = 243 - 1 = 242$$

### Question 2

Il s'agit de calculer la somme  $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n$

Une méthode à **connaître** pour calculer une somme :

- on l'initialise (souvent à 0)
- puis à l'aide d'une boucle, on ajoute les termes 1 à  $n$

En langage naturel

```
Somme(n)
  S ← 0
  Pour k allant de 0 à n
    S ← S + 3k
  Fin Pour
  Renvoyer S
```

En Python

```
def somme(n):
    s = 0
    for k in range(0, n+1):
        s = s + 3**k
    return s
```

Une autre version ... comme  $k$  démarre à 0, le range peut être simplifié

```
def somme(n):
    s = 0
    for k in range(n+1):
        s = s + 3**k
    return s
```