

**Exercice 1**

|   |                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Que désigne-t-on par $\mathbb{N}$ ? par $\mathbb{Z}$ ?                                                                                                                                                                                              |
| 2 | Soit $e$ un réel strictement positif fixé, écrire <b>si possible</b> sous la forme $a \times q^k$ avec $a$ et $q$ réels et $k$ un entier<br>$a(n) = 8e^{n+2} \times 2e^n$ $b(n) = 2e^{n+3} + 3e^n$<br>$d(n) = (3e^n)^3$ $e(n) = \sqrt{5}e^n + 3e^n$ |
| 3 | Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par : $f(n) = \frac{n}{n+3}$ Ecrire $f(n+1)$ en fonction de $n$                                                                                                                                       |

**Exercice 2** Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{-x^2+12x+8}{4}$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $f(n) = \frac{-n^2+12n+8}{4}$

- 1) Calculer, si possible,  $f(3)$  et  $g(3)$
- 2) Calculer, si possible,  $f(-1)$  et  $g(-1)$
- 3) Calculer, si possible,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $g\left(\frac{1}{2}\right)$
- 4) Représenter graphiquement la fonction  $f$  pour  $n \in [0; 17]$
- 5) Sur le même graphique, représenter graphiquement la fonction  $g$

**Exercice 3**

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $f(n) = n^2 - 2n$

- a) Calculer  $f(0)$ ;  $f(1)$ ;  $f(2)$
- b) Ecrire  $f(n+1)$  en fonction de  $n$

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $n$  par  $\begin{cases} g(0) = 5 \\ g(n+1) = g(n) + 2n \end{cases}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  Calculer  $g(0)$ ;  $g(1)$ ;  $g(2)$ ;  $g(5)$

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $f(n) = 5 + 3n$

- a) Donner, si possible, les images de  $-2$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$  et  $2,5$
- b) Ecrire  $f(2n)$  en fonction de  $n$
- c) Ecrire  $f(n+1)$  en fonction de  $n$
- d) Ecrire  $f(n+1)$  en fonction de  $f(n)$
- e) Calculer  $f(n+1) - f(n)$
- f) On choisit de noter  $u_n$  le nombre  $f(n)$   
Réécrire l'énoncé en utilisant cette notation

**Exercice 5**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $g(n) = 3^n$

- a) Donner, si possible, les images de  $-2$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$  et  $2,5$
- b) Ecrire  $g(2n)$  en fonction de  $n$
- c) Ecrire  $g(n+1)$  en fonction de  $n$
- d) Ecrire  $g(n+1)$  en fonction de  $g(n)$
- e) Calculer le coefficient multiplicateur de  $g(n)$  à  $g(n+1)$
- f) On choisit de noter  $v_n$  le nombre  $g(n)$   
Réécrire l'énoncé en utilisant cette notation

## Définition de $a^{-n}$ ? de $a^0$ ? formules ?

Ne pas confondre  $2^{-3}$  avec  $2 \times 10^{-3}$  surtout que certaines calculatrices écrivent  $2^{-03}$  pour  $2 \times 10^{-3}$

Considérons le tableau sur fond bleu

| $n$   | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7   | 8   | 9   | 10   |
|-------|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|------|
| $2^n$ | ?  | ?  | ?  | ? | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |

Pour passer d'une colonne à celle de droite, on multiplie par 2

Cela traduit la propriété  $2^{n+p} = 2^n \times 2^p$  avec  $n$  et  $p$  entiers naturels non nuls.

Les définitions de  $a^{-n}$  et de  $a^0$  ont été posées pour conserver la propriété  $2^{n+p} = 2^n \times 2^p$  avec des entiers **relatifs**. Cela revient à conserver la logique du tableau : pour passer d'une colonne à celle de gauche, on multiplie par  $\frac{1}{2}$  (et pour passer d'une colonne à celle de droite, on multiplie par 2).

| $n$   | -3                                                                  | -2                                               | -1                                   | 0                          | 1 | 2 | 3 | 4  |
|-------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|---|---|---|----|
| $2^n$ | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ | $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ | $2 \times \frac{1}{2} = 1$ | 2 | 4 | 8 | 16 |

Ainsi :  $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$      $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$      $2^{-1} = \frac{1}{2}$     puis généralement  $2^0 = 1$      $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$      $e^{-1} = \frac{1}{e}$

### Définition :

Soit  $a$  un réel non nul et  $n$  un entier naturel non nul. On pose :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### Propriétés

$a$  et  $b$  des réels non nuls.  $n$  et  $p$  des entiers relatifs.

- Des formules avec la « même base »  $a$

$$(a^n)^p = a^{n \times p}$$

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

- Des formules avec le même exposant

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- Attention, pas de formules simples avec les additions / soustractions et les exposants.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \text{ ce n'est pas simple}$$

pas de formule pour  $a^2 + b^2$  (en se limitant aux nombres réels)

## Exercice 1

### Question 1

$\mathbb{N}$  est l'ensemble des *entiers naturels* :  $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots$

$\mathbb{Z}$  est l'ensemble des *entiers relatifs* :  $\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots$

### Question 2

La forme  $a \times e^k$  veut dire que l'on cherche une écriture sous le modèle : *nombre réel*  $\times$  *réel* <sup>*nombre entier*</sup>

$$a(n) = 8e^{n+2} \times 2e^n$$

$$a(n) = 8e^{n+2} \times 2e^n = 16 \times e^{n+2+n} = 16 \times e^2 \times e^{2n} = 16e^2 \times (e^2)^n$$

Formules utilisées :  $a^p \times a^n = a^{n+p}$   $(a^n)^p = a^{n \times p}$

$a(n)$  est de la forme  $a \times e^k$  avec  $a = 16e^2$  et  $q = e^2$

$$b(n) = 2e^{n+3} + 3e^n$$

$$b(n) = 2e^{n+3} + 3e^n = 2e^n \times e^3 + 3 \times e^n = (2e^3 + 3) \times e^n$$

De la forme  $a \times e^k$  avec  $a = 2e^3 + 3$  et  $q = e$

$$d(n) = (3e^n)^3$$

$$d(n) = (3e^n)^3 = 3e^n \times 3e^n \times 3e^n = 27 \times e^{n+n+n} = 27 \times e^{3n} = 27 \times (e^3)^n$$

De la forme  $a \times q^n$  avec  $a = 27$  et  $q = e^3$

$$e(n) = \sqrt{5}e^n + 3e^n$$

$$e(n) = \sqrt{5}e^n + 3e^n = (\sqrt{5} + 3)e^n$$

De la forme  $a \times q^n$  avec  $a = \sqrt{5} + 3$  et  $q = e$

### Question 3

Remarque :  $f(n) = \frac{n}{n+3}$  se lit  $f(\text{entier}) = \frac{\text{entier}}{\text{entier}+3}$

ici va remplacer *entier* par  $(n+1)$  ... en n'oubliant pas les parenthèses pour bien conserver les priorités éventuelles.

$$f(n+1) = \frac{(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{n+1}{n+4}$$

## Exercice 2

**Question 1**  $f(3) = \frac{-(3)^2+12(3)+8}{4} = \frac{35}{4}$  et  $g(3) = \frac{-(3)^2+12(3)+8}{4} = \frac{35}{4}$

**Question 2** **Rappel : l'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres qui ont une image.**

$-1 \notin [0 ; +\infty[$  donc  $g(-1)$  n'existe pas

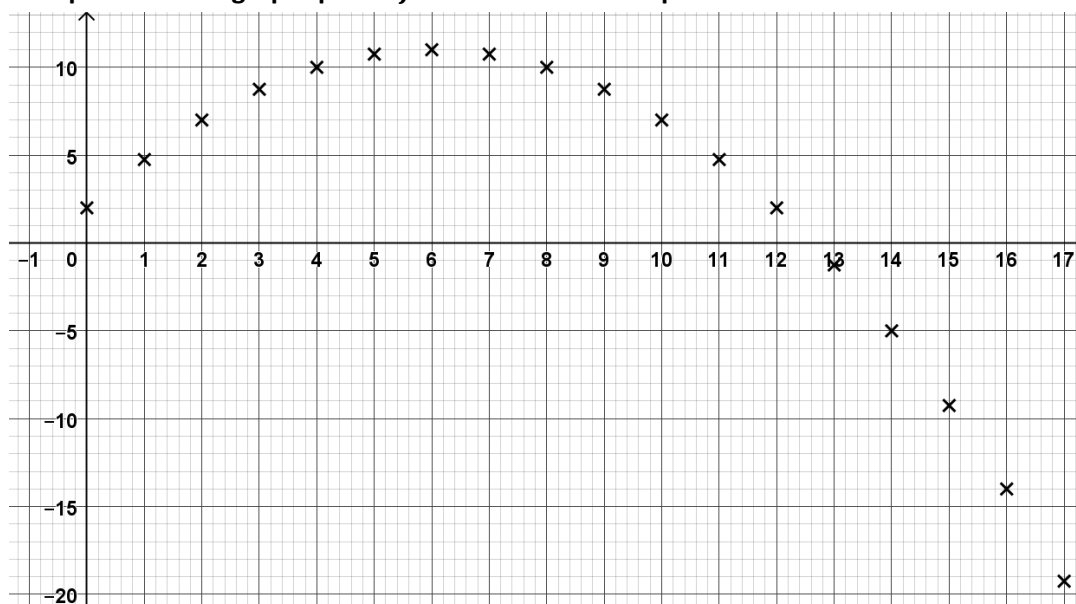
$-1 \notin \mathbb{N}$  donc  $f(-1)$  n'existe pas

**Question 3**  $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^2+12\left(\frac{1}{2}\right)+8}{4} = \frac{-\frac{1}{4}+6+8}{4} = \frac{\frac{55}{4}}{4} = \frac{55}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{55}{16}$   $f\left(\frac{1}{2}\right)$  n'existe pas car  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

### Question 4

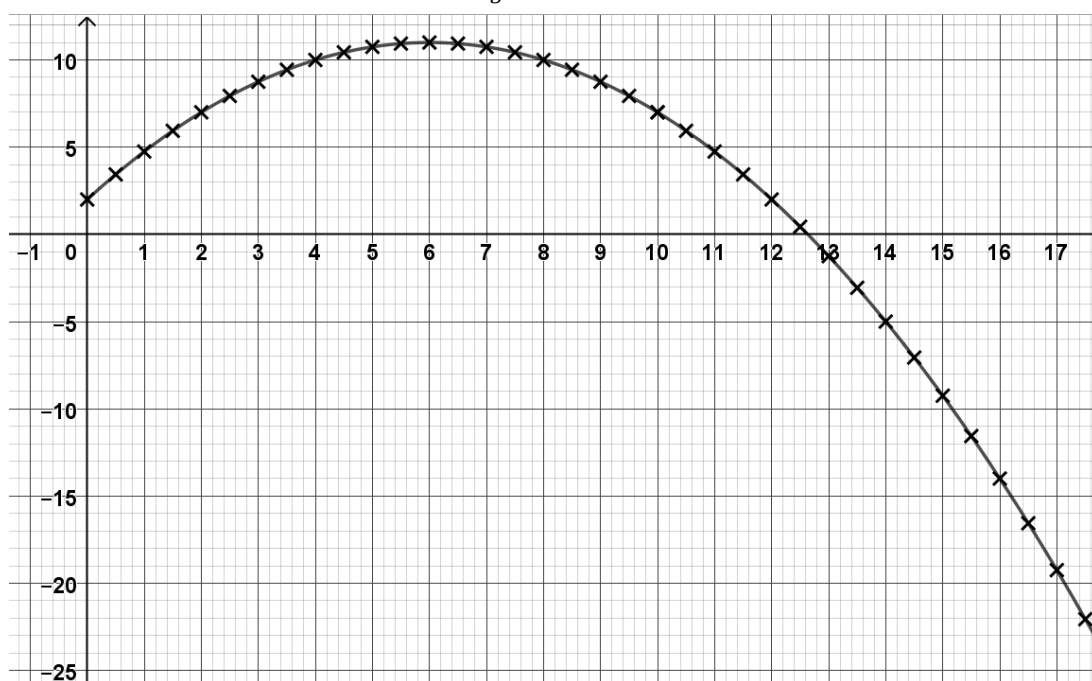
Les points de  $C_f$  sont de la forme  $(n ; f(n))$  où  $n \in \mathbb{N}$

La représentation graphique de  $f$  est donc formée de **points isolés** d'abscisses entières.



La représentation de la fonction  $g$  est tracée en « continu », sans lever le crayon.

Les points mis sont quelques points de  $C_g$  qui nous servent de guide pour tracer la courbe.



### Exercice 3

#### Question 1

a)  $f(0) = 0^2 - 2(0) = 0$        $f(1) = 1^2 - 2(1) = -1$        $f(2) = 2^2 - 2(2) = 0$

b) On peut aussi remarquer que le nom de la variable pourrait être changé :

$$f(k) = k^2 - 2k \quad f(p) = p^2 - 2p \quad f(i) = i^2 - 2i \quad f(j) = j^2 - 2j \quad f(\dots) = \dots^2 - 2 \dots$$

Devant  $f(n) = n^2 - 2n$



On pense  $f(\text{entier}) = (\text{entier})^2 - 2(\text{entier})$



On « remplace » *entier* par  $(n+1)$  sans oublier les parenthèses



On obtient  $f(n+1) = (n+1)^2 - 2(n+1)$

$$f(n+1) = (n+1)^2 - 2(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 = n^2 - 1$$

## Question 2

$g(0) = 5$  ... c'est écrit dans la définition ...

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 0$ , on obtient :  $g(0+1) = g(0) + 2(0)$

Et donc  $g(1) = 5 + 2 \times 0 = 5$

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 1$ , on obtient :  $g(1+1) = g(1) + 2(1)$

Et donc  $g(2) = 5 + 2 \times 1 = 7$

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 2$ , on obtient :  $g(2+1) = g(2) + 2(2)$

Et donc  $g(3) = 7 + 2 \times 2 = 11$

**Avec une telle définition, on est obligé de calculer  $g(4)$  pour accéder à  $g(5)$**

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 3$ , on obtient :  $g(3+1) = g(3) + 2(3)$

Et donc  $g(4) = 11 + 2 \times 3 = 17$

On écrit la relation  $g(n+1) = g(n) + 2n$  pour  $n = 4$ , on obtient :  $g(4+1) = g(4) + 2(4)$

Et donc  $g(5) = 17 + 2 \times 4 = 25$

## Exercice 4

a) Comme  $-2 \notin \mathbb{N}$ ,  $f(-2)$  n'existe pas

$$f(0) = 5 + 3(0) = 5$$

$$f(1) = 5 + 3(1) = 8$$

$$f(2) = 5 + 3(2) = 11$$

Comme  $2,5 \notin \mathbb{N}$ ,  $f(2,5)$  n'existe pas

b)  $f(n) = 5 + 3n$  peut se lire  $f(\dots) = 5 + 3(\dots)$

$$f(2n) = 5 + 3(2n) = 5 + 6n$$

c)  $f(n+1) = 5 + 3(n+1) = 5 + 3n + 3 = 3n + 8$

d)  $f(n+1) = 3n + 8 = 3n + 5 + 3$

Et comme  $f(n) = 5 + 3n$

$$f(n+1) = f(n) + 3$$

e)  $f(n+1) - f(n) = (5n + 8) - (5n + 3) = 5$

Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute 5.

## Question f

Au lieu de dire « la fonction  $f$  », on dira « la « suite  $(u_n)$  »

On ne précise pas que  $n$  est un entier ... c'est implicite avec les suites

## Exercice 5

a) Comme  $-2 \notin \mathbb{N}$ ,  $g(-2)$  n'existe pas

$$g(0) = 3^0 = 1$$

$$g(1) = 3^1 = 3$$

$$g(2) = 3^2 = 9$$

Comme  $2,5 \notin \mathbb{N}$ ,  $g(2,5)$  n'existe pas

b)  $g(n) = 3^n$  peut se lire  $g(\dots) = 3^{\dots}$

$$g(2n) = 3^{(2n)} = (3^2)^n = 9^n$$

c)  $g(n+1) = 3^{(n+1)} = 3^{n+1}$

d)  $g(n+1) = 3^{n+1} = 3 \times 3^n$

Et comme  $g(n) = 3^n$

$$g(n+1) = 3g(n)$$

e) Coefficient multiplicateur =  $\frac{\text{Valeur finale}}{\text{Valeur initiale}}$

$$CM = \frac{g(n+1)}{g(n)} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3 \times 3^n}{3^n} = 3$$

Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par 3

## Question f

Au lieu de dire « la fonction  $g$  », on dira « la « suite  $(v_n)$  »

On ne précise pas que  $n$  est un entier ... c'est implicite avec les suites

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_n = 5 + 3n$  pour  $n \geq 0$

Au lieu de parler « d'image », on parle de « terme »

- a) Calculer les termes de  $u_0, u_1, u_2$
- b) Ecrire  $u_{2n}$  en fonction de  $n$
- c) Ecrire  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$
- d) Ecrire  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$
- e) Montrer que la suite  $(u_n)$  est arithmétique

Soit  $(v_n)$  définie par  $v_n = 3^n$  pour  $n \geq 0$

Au lieu de parler « d'image », on parle de « terme »

- a) Calculer les termes de  $v_0, v_1, v_2$
- b) Ecrire  $v_{2n}$  en fonction de  $n$
- c) Ecrire  $v_{n+1}$  en fonction de  $n$
- d) Ecrire  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$
- e) Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique