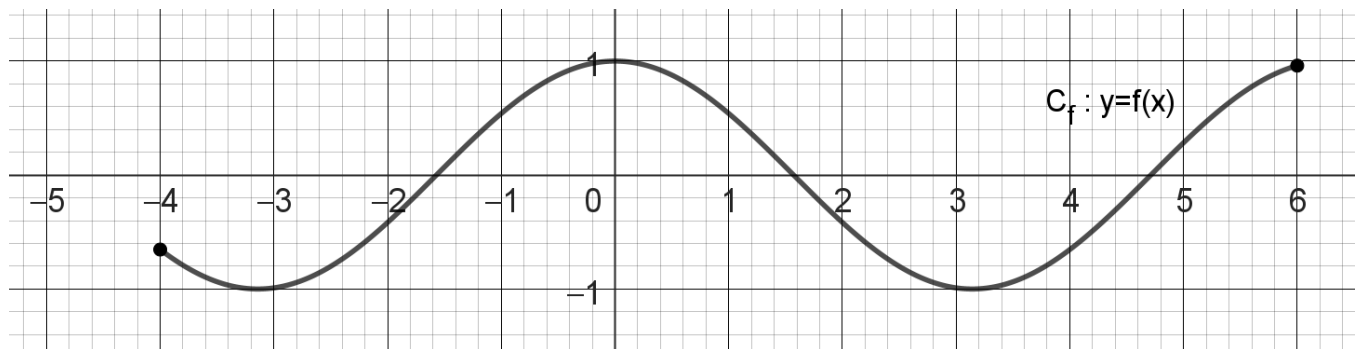


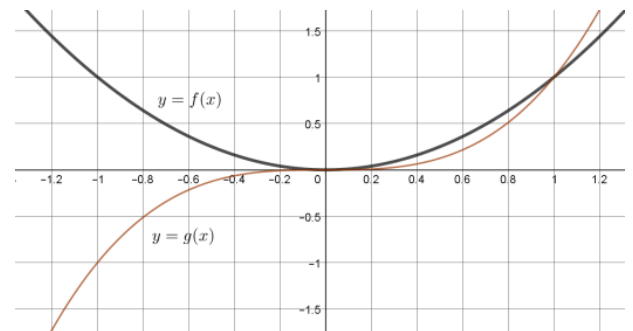
Ex 1 : Soit f la fonction dont voici la représentation graphique.

Vous remarquerez que d'après le codage, l'ensemble de définition de f est : $[-4 ; 6]$

Par lecture graphique, dresser le tableau de signes de f . Expliquer.



Ex 2 : Résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$. Expliquer.



Point méthode ... il est juste demandé de comprendre et de retenir les méthodes

Méthode 1 : Pour $m \neq 0$, l'expression $mx + p$ est du signe de m à « droite du 0 »
(dit comme cela, ce n'est pas rigoureux mais permet une mémorisation facile)

Méthode 2 Vous connaissez la courbe représentant la fonction f , **on vous demande** le tableau de signes de $f(x)$
Attention : une lecture graphique n'est pas une preuve (donc à n'utiliser que si vous voulez une lecture graphique)

- Quand la courbe C_f est en-dessous de l'axe des abscisses, $f(x) < 0$
- Quand la courbe C_f est au-dessus de l'axe des abscisses, $f(x) > 0$
- Quand C_f coupe l'axe des abscisses, $f(x) = 0$

Méthode 3 Vous connaissez le tableau de signes de $f(x)$,
on vous demande la position de la courbe C_f par rapport à l'axe des abscisses

- Quand $f(x) < 0$ la courbe C_f est en-dessous de l'axe des abscisses
- Quand $f(x) > 0$ la courbe C_f est au-dessus de l'axe des abscisses
- Quand $f(x) = 0$ C_f coupe l'axe des abscisses

Méthode 4 Savoir comparer $f(x)$ et $g(x)$ connaissant le signe de leur différence

Cas : On connaît le signe de $f(x) - g(x)$

- quand $f(x) - g(x) < 0$, on a : $f(x) < g(x)$
donc C_f est en-dessous de C_g
- quand $f(x) - g(x) > 0$, on a : $f(x) > g(x)$
donc C_f est au-dessus de C_g

Cas : On connaît le signe de $g(x) - f(x)$

- quand $g(x) - f(x) < 0$, on a : $g(x) < f(x)$
donc C_g est en-dessous de C_f
- quand $g(x) - f(x) > 0$, on a : $g(x) > f(x)$
donc C_g est au-dessus de C_f

- quand $f(x) - g(x) = 0$, on a : $f(x) = g(x)$
donc C_f et C_g se coupent

- quand $g(x) - f(x) = 0$, on a : $f(x) = g(x)$
donc C_f et C_g se coupent

La question à se poser :

As-t-on calculé *le plus petit – le plus grand* ou *le plus grand – le plus petit* ?

Méthode 5 Pour étudier les positions relatives des courbes C_f et C_g

1. On calcule (au choix) $f(x) - g(x)$ ou $g(x) - f(x)$
On factorise ou/et réduit au même dénominateur
2. On en dresse le tableau de signe
3. Connaissant le signe de la différence, on peut comparer $f(x)$ et $g(x)$ (voir méthode 4)

Ex 3 On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 3)(2x - 1) \quad g(x) = (x + 3)(1 - 6x) \quad h(x) = 2x - 3$$

Dans un repère, on appelle C_f, C_g et C_h les représentations graphiques de f, g et h .

1. Pour quelles valeurs de x , la courbe C_f est-elle en-dessous de l'axe des abscisses ?
2. Pour quelles valeurs de x , la courbe C_g est-elle au-dessus de l'axe des abscisses ?
3. Pour quelles valeurs de x , la courbe C_g est-elle en-dessous de la courbe C_f ?
4. Pour quelles valeurs de x , la courbe C_f est-elle au-dessus de la courbe C_h ?

Ex 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1-3x}{x+1} - 2$ et g la fonction définie par $g(x) = -\sqrt{3-x} - 1$

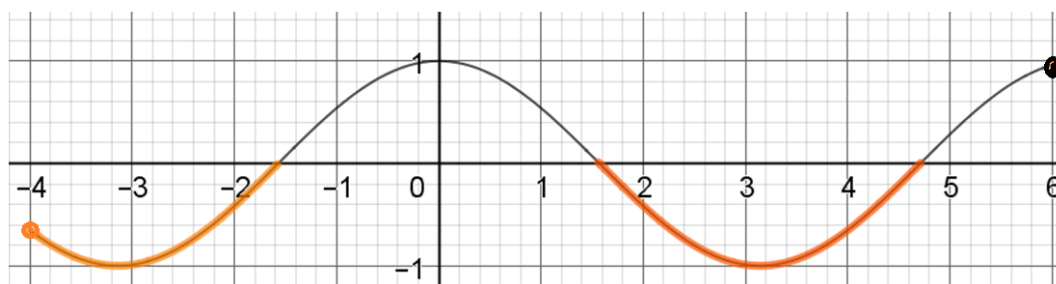
1. Donner l'ensemble de définition de g
2. Donner l'ensemble de définition de f
3. Représenter graphiquement la fonction f pour x entre -4 et 4 . On note C_f cette représentation graphique.
4. Pour quelles valeurs de x , C_f est-elle au-dessus de l'axe des abscisses ?
5. Résoudre $f(x) \leq 5$
6. Pour quelles valeurs de x , C_g (la représentation graphique de g) est-elle en-dessous de l'axe des abscisses ?

Pour se corriger

Exercice 1

Démarche pour lire graphiquement un tableau de signes

On connaît la courbe représentant la fonction f , **on en déduit** le tableau de signes de $f(x)$
(limite de la démarche : une lecture graphique n'est pas une preuve)



- Pour $x \in [-4; a[\cup]b; c[$ avec $a \approx -1,6$ $b \approx 1,6$ $c \approx 4,7$
 C_f semble être en-dessous de l'axe des abscisses **donc** $f(x) < 0$

- Pour $x \in]a ; b[\cup]c ; 6[$ avec $a \approx -1,6$ $b \approx 1,6$ $c \approx 4,7$
 C_f semble être en-dessous de l'axe des abscisses **donc** $f(x) > 0$
- Pour $x \approx -1,6$ et $x \approx 1,6$ et $x \approx 4,7$ C_f coupe l'axe des abscisses donc $f(x) = 0$

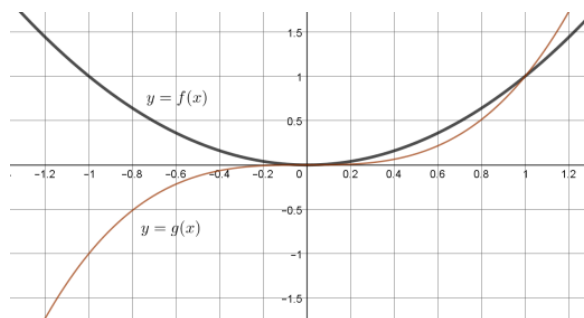
Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$		$-1,6$		$1,6$		$4,7$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Exercice 2

Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont **les abscisses** des points de la courbe C_f situés **au-dessous** de la courbe C_g

$$S = [1 ; +\infty[$$



Exercice 3

Question 1

Méthode : C_f est en-dessous de l'axe des abscisses lorsque $f(x) < 0$

Etude des signes

$2x - 1$ de signe + ?

$$2x - 1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$



division par 2
positif non nul

$2x - 1$ de signe - ?

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$x + 3$ de signe + ?

$$x + 3 \geq 0$$

$$x \geq -3$$

$x + 3$ de signe - ?

$$x \leq -3$$

Tableau des signes

Valeurs de x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $x + 3$		-	0	+		+	
Signe de $2x - 1$		-		-	0	+	
Signe de $(x + 3)(2x - 1)$		+	0	-	0	+	

Conclusion C_f est en-dessous de l'axe des abscisses lorsque $-3 < x < \frac{1}{2}$

Question 2

Méthode : C_g est au-dessus de l'axe des abscisses lorsque $g(x) > 0$

Etude des signes (on pourrait remplacer ceci en remarquant que $1 - 6x$ est de la forme $mx + p$ avec $m < 0$)

$1 - 6x$ de signe + ?

$$1 - 6x \geq 0$$

$$-6x \geq -1$$

$$x \leq \frac{-1}{-6}$$

$$x \leq \frac{1}{6}$$



division par -6
négatif non nul

$1 - 6x$ de signe - ?

$$x \geq \frac{1}{6}$$

Le signe de $x + 3$ a été étudié à la question précédente.

Tableau des signes

Valeurs de x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
Signe de $x + 3$	-	0	+	+
Signe de $1 - 6x$	+	+	0	-
Signe de $(x + 3)(1 - 6x)$	-	0	0	-

Conclusion C_g est au-dessus de l'axe des abscisses lorsque $-3 < x < \frac{1}{6}$

Question 3

Méthode : La courbe C_g est en-dessous de la courbe C_f lorsque $g(x) < f(x)$

Factorisation de $g(x) - f(x)$

$$\begin{aligned} g(x) < f(x) &\Leftrightarrow g(x) - f(x) < 0 &\Leftrightarrow (x + 3)(1 - 6x) - (x + 3)(2x - 1) < 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3)[(1 - 6x) - (2x - 1)] < 0 &\Leftrightarrow (x + 3)(-8x + 2) < 0 \end{aligned}$$

Etude des signes

$-8x + 2$ de signe + ?

$$-8x + 2 \geq 0$$

$$-8x \geq -2$$

$$x \leq \frac{-2}{-8}$$

$$x \leq \frac{1}{4}$$



division par -8
négatif non nul

$-8x + 2$ de signe - ?

$$x \geq \frac{1}{4}$$

Le signe de $x + 3$ a été étudié à la question précédente.

Tableau des signes

Valeurs de x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
Signe de $x + 3$	-	0	+	+
Signe de $-8x + 2$	+	+	0	-
Signe de $(x + 3)(-8x + 2)$	-	0	0	-

Conclusion La courbe C_g est en-dessous de la courbe C_f lorsque $x \in]-\infty; -3[\cup]\frac{1}{4}; +\infty[$

Question 4

Méthode : La courbe C_f est au-dessus de la courbe C_h lorsque $f(x) > h(x)$

Factorisation de $f(x) - h(x)$

$$f(x) > h(x) \Leftrightarrow f(x) > 2x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 > 2x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow x(2x + 3) > 0$$

Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$+\infty$
Signe de $2x + 3$ forme $mx + p$ avec $m = 2$	—	0	+	+
	signe de $-m$		signe de m	
Signe de x	—	—	0	+
Signe de $x(2x + 3)$	+	0	—	+

Conclusion Pour $x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]0; +\infty[$ on a : $f(x) - h(x) > 0$
donc la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_h

Exercice 4

Question 1



L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres qui ont une image par la fonction.

Les opérations de la formule présentes dans la formule $-\sqrt{3-x}-1$ sont des multiplications, additions, soustractions et une **racine carrée**. Pour chaque valeur de x , on peut toujours faire les calculs SAUF essayer de calculer la racine carrée d'un nombre négatif : le nombre $3-x$ doit être positif ou nul !

$$\begin{aligned} 3-x &\geq 0 &\Leftrightarrow & -x \geq -1 \\ &&\Leftrightarrow & x \leq \frac{-1}{-1} \\ &&\Leftrightarrow & x \leq 1 \end{aligned}$$

division par -1 qui est négatif non nul

L'ensemble de définition de g est $] -\infty; 1]$.

Question 2

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres qui ont une image par la fonction.

Les opérations de la formule présentes dans la formule $-\sqrt{3-x}-1$ sont des multiplications, additions, soustractions et une **division**. Pour chaque valeur de x , on peut toujours faire les calculs SAUF diviser par 0.

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

L'ensemble de définition est $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$. Cet ensemble se note aussi : $\mathbb{R} - \{-1\}$

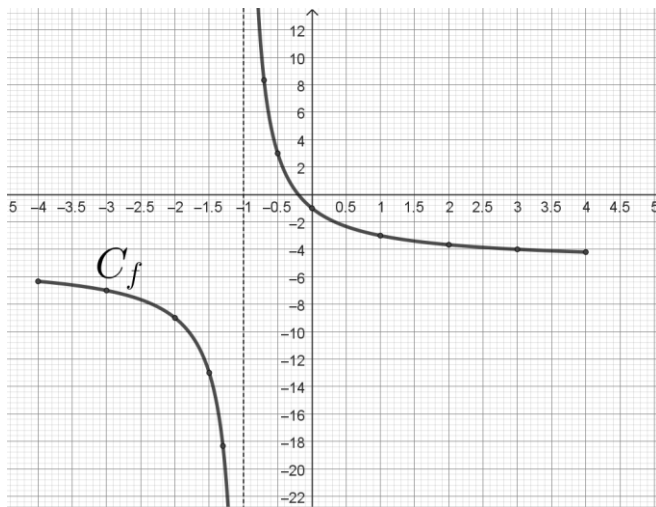
Question 3

On peut s'appuyer

- sur un tableau de valeurs,
voir ici pour les [TI 83](#), ici pour les [TI 82](#), ici pour les [NumWorks](#), ici pour les [CASIO Graph 35](#)
- ou sur le graphique sur la calculatrice (et le mode Trace) ...
voir ici pour les [TI 82](#), ici pour les [TI 83](#), ici pour les [NumWorks](#), ici pour les [CASIO Graph 35](#)

Tableau de valeurs (on ne le met sur la copie que s'il est demandé)

Valeurs de x	-4	-3	-2	-1,5	-1,3	-1	-0,7	-0,5	0	1	2	3	4
Valeurs approchées de $f(x)$	-6,33	-7	-9	-3	-8,33	X	8,33	3	-1	-3	-3,67	-4	-4,2



Question 4

Idée : On cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$

Comme l'inconnue est au dénominateur, on pense à un tableau de signes.

Comme on va utiliser la règle des signes, valables pour les multiplications et les divisions, on doit d'abord réduire au même dénominateur (pour avoir une division !).

Mise en inéquation $f(x) = \frac{1-3x}{x+1} - 2 = \frac{1-3x}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x+1} = \frac{1-3x-2x-2}{x+1} = \frac{-5x-1}{x+1}$

Ainsi $M(x; y)$ est au-dessus de $C_f \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-5x-1}{x+1} > 0$

Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$	
Signe de $-5x - 1$ forme $mx + p$ avec $m = -5$	+	+	0	-	
	signe de $-m$			signe de m	
Signe de $x + 1$ forme $mx + p$ avec $m = 1$	+	0	-	-	
	signe de $-m$			signe de m	
Signe de $\frac{-5x-1}{x+1}$	+		+	0	-

Conclusion Pour $x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{5};$

donc $f(x) > 0$ donc C_f est au-dessus de l'axe des abscisses

Question 5

Mise en inéquation

$$f(x) \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x+1} - 2 \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x+1} - 2 - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x+1} - 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-3x}{x+1} - \frac{7(x+1)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x-7x-7}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-10x-6}{x+1} \leq 0$$

Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{5}$	$+\infty$
Signe de $-10x - 6$ forme $mx + p$ avec $m = -10$	+	+	0	-
	signe de $-m$		signe de m	
Signe de $x + 1$ forme $mx + p$ avec $m = 1$	-	0	+	+
	signe de m		signe de m	
Signe de $\frac{-10x-6}{x+1}$	-		+	0

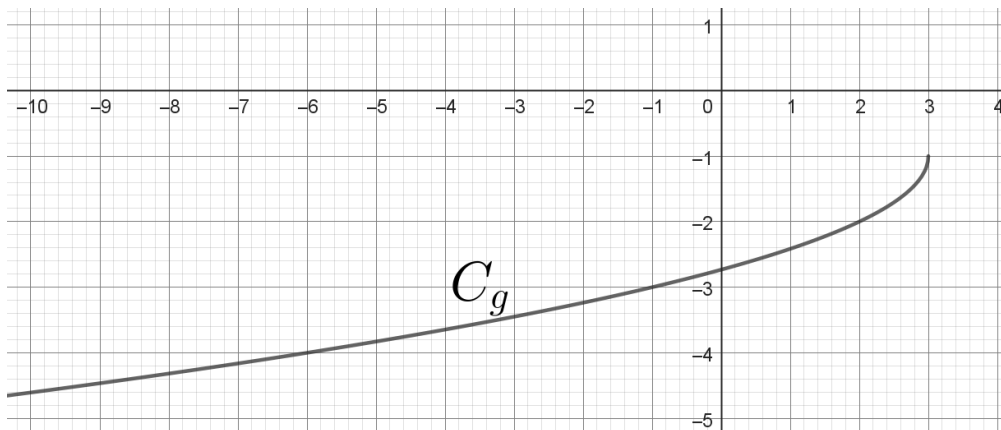
Ensemble des solutions

Pour trouver les solutions de $f(x) \leq 0$, on recherche dans la ligne de $\frac{-10x-6}{x+1}$ les signes - (0 non compris)

$$f(x) \leq 5 \quad \text{si et seulement si} \quad x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{3}{5}; +\infty[$$

Question 6

Conjecture (à la calculatrice ... non demandée)



Comme C_g semble en-dessous de l'axe des abscisses, pour tout $x \in]-\infty; 3]$, il semblerait que $g(x) < 0$

Preuve

Le résultat d'une racine carrée est toujours positif :

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tous les } x \in]-\infty; 3], \quad & \sqrt{3-x} \geq 0 \\
 & -\sqrt{3-x} \leq 0 \\
 & -\sqrt{3-x} - 1 \leq -1 \\
 & g(x) \leq -1
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 \rightarrow \text{division par } -5 \\
 \rightarrow \text{négatif non nul} \\
 \rightarrow \text{En soustrayant à chaque membre}
 \end{array}$$

Ainsi, pour tous les x de l'ensemble de définition de g , $g(x) < 0$

donc C_g est toujours en-dessous de l'axe des abscisses.