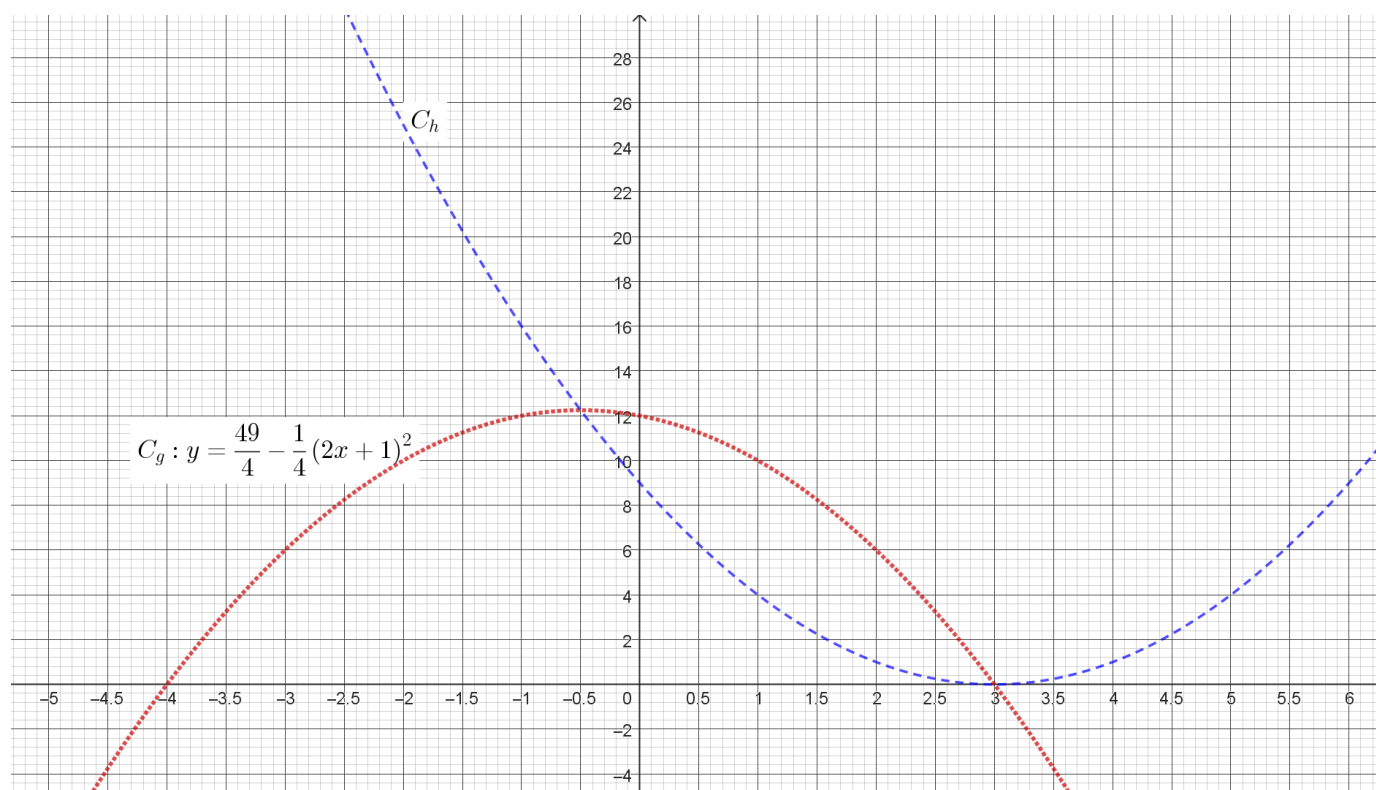


p, g, f et h sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On note C_p, C_g, C_f et C_h leurs représentations graphiques.

$$p(x) = 12 - 4x$$

$$f(x) = (3 - x)(3 - 2x)^2$$

$$h(x) = (3 - x)^2$$



Très rapidement et sans justifier

1. Donner une équation de C_h
2. Ecrire $g(x)$ en fonction de x

Lectures graphiques

3. Résoudre graphiquement $g(x) < 8$. Expliquer.
4. Résoudre graphiquement $g(x) > h(x)$. Expliquer.
5. Résoudre graphiquement $g(x) \geq 0$. Expliquer.
6. Résoudre graphiquement $g(x) = h(x)$. Expliquer.
7. Lire graphiquement l'image de -2 par h . Expliquer.
8. Lire graphiquement les antécédents de 4 par h . Expliquer.

Sur le même graphique que C_g et C_h , représenter graphiquement

9. Représenter graphiquement C_p . Expliquer.
10. Sans expliquer, représenter graphiquement C_f

Changements de forme

11. Développer $f(x)$
12. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $g(x) = (x + 4)(3 - x)$
13. Développer $h(x)$

Différencier les questions

14. a. Résoudre $f(x) = 0$

b. Calculer les coordonnées des points

d'intersections de C_h avec l'axe des abscisses

15. a. Résoudre graphiquement $f(x) = h(x)$
- b. Résoudre $g(x) = h(x)$

Calculs d'images et d'antécédents

16. Calculer les antécédents de 12 par g
17. Calculer l'image de $7 + \sqrt{3}$ par g

Choisir la bonne forme

18. Calculer l'image de $3 - \sqrt{5}$ par h
19. Résoudre $g(x) = 0$.

Interpréter graphiquement les solutions.

Calculs en vrac

20. Résoudre $p(x) > 0$. Donner une interprétation graphique des solutions.
21. a. Résoudre graphiquement $f(x) = p(x)$
- b. **(Piste rouge)**
Retrouver ce résultat par le calcul $f(x) = p(x)$
22. **(Piste rouge)**
Trouver les points d'intersections de C_h et C_p

Question 1 Par définition, la « *représentation graphique* » de h » a pour équation $y = h(x)$.
Comme $h(x) = (3 - x)^2$, une équation de C_h est $y = (3 - x)^2$.
Ce qu'on note $C_h: y = (3 - x)^2$.

Question 2 On sait que $C_g: y = \frac{49}{4} - \frac{1}{4}(2x + 1)^2$ donc $g(x) = \frac{49}{4} - \frac{1}{4}(2x + 1)^2$

Question 3 **Première rédaction**

Pour résoudre graphiquement $g(x) < 8$:

- On cherche les points de C_g dont l'ordonnée est inférieure à 8
- On lit leurs abscisses

L'ensemble des solutions est $] -\infty ; -2,5 [\cup] 1,6 ; +\infty [$ où $-2,5$ et $1,6$ sont des valeurs approchées.

Avec un peu plus de rigueur, on pourrait noter l'ensemble des solutions
 $] -\infty ; a [\cup] b ; +\infty [$ où $a \approx -2,5$ et $b \approx 1,6$

Seconde rédaction

Pour résoudre graphiquement $g(x) < 8$:

- On cherche les points de C_g situés en-dessous de la droite d'équation $y = 8$
- On lit leurs abscisses

L'ensemble des solutions est $] -\infty ; -2,5 [\cup] 1,6 ; +\infty [$ où $-2,5$ et $1,6$ sont des valeurs approchées.

Remarque

$\cup$ se lit « *union* » et signifie que l'on réunit l'ensemble $] -\infty ; -2,5 [$ avec l'ensemble $] 1,6 ; +\infty [$ pour n'en former plus qu'un seul nouvel ensemble.

Une solution est un nombre qui est dans $] -\infty ; -2,5 [$ **ou** dans $] 1,6 ; +\infty [$

Question 4 Pour résoudre graphiquement $g(x) > h(x)$

- On cherche les points de C_g situés au-dessus de C_h
- On lit leurs abscisses

L'ensemble des solutions est $] -0,5 ; 3 [$

Avec un peu plus de rigueur, on pourrait noter l'ensemble des solutions : $] a ; b [$ où $a \approx -0,5$ et $b \approx 3$

Question 5 Pour résoudre graphiquement $g(x) \geq 0$

- On cherche les points de C_g situés au-dessus de l'axe des abscisses
- On lit leurs abscisses

L'ensemble des solutions **semble** être $[-4 ; 3]$

Autre rédaction

- On cherche les points de C_g situés au-dessus de la droite d'équation $y = 0$
- On lit leurs abscisses

L'ensemble des solutions **semble** être $[-4 ; 3]$

Question 6 Pour résoudre graphiquement $g(x) = h(x)$

- On cherche les points d'intersection de C_g et de C_h
- On lit leurs abscisses

L'ensemble des solutions semble être $\{-4 ; 3\}$

Remarque

$\{-4 ; 3\}$ ne contient que deux nombres -4 et 3 . Les accolades $\{\dots\}$ indiquent une liste.

$[-4 ; 3]$ contient l'infinité de réels entre -4 (compris) et 3 (compris) comme $-3,87$; $\sqrt{2} + 1$; 1 ; $\frac{-47}{17}$ qui sont tous entre -4 et 3 .

Question 7 Pour lire graphiquement l'image de -2 par h

- On cherche le point de C_h dont l'abscisse est -2
- On lit son ordonnée

Le point semble avoir pour coordonnées $(-2 ; 25)$.

Comme ce point est sur C_h , 25 est l'image de 2 par h (25 est le résultat de la formule $h(x)$ pour $x = 2$)

$h(-2) \approx 25$ Avec les lectures graphiques, on n'a pas de certitudes.

Question 8 Pour lire graphiquement les antécédents de 4 par h

- On cherche les points de C_h dont l'ordonnée est 4
- On lit leurs abscisses

Les points semblent avoir pour coordonnées $(1 ; 4)$ et $(5 ; 4)$.

Comme ces points sont sur C_h , 4 est l'image de 1 et aussi de 4 par h

Les antécédents de 4 semblent être 1 et de 4 .

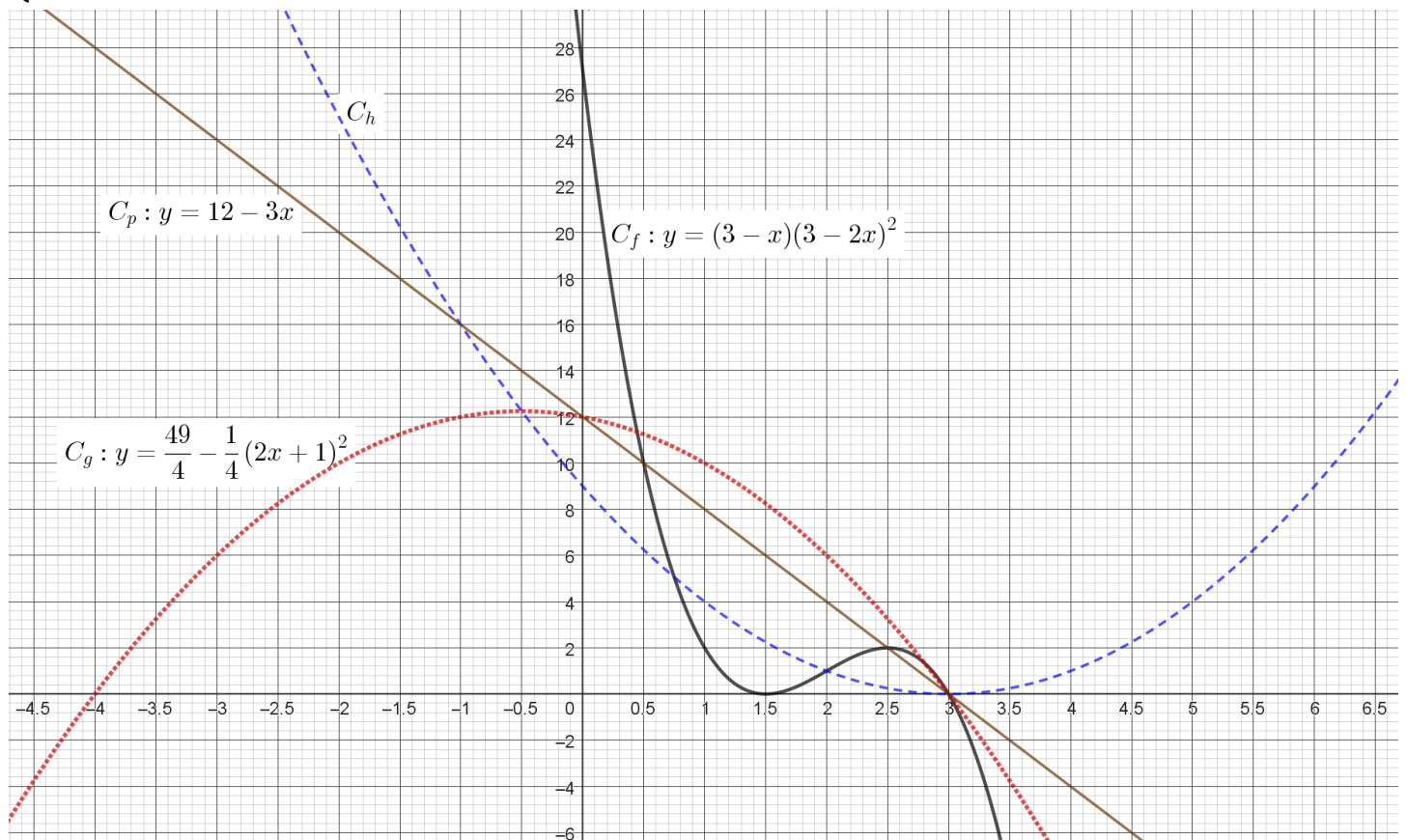
Question 9 $p(x) = 12 - 4x = -4x + 12$

On reconnaît la forme $mx + p$ avec $m = -4$ et $p = 12$

donc la courbe d'équation $y = -x + 12$ est une droite.

Pour la tracer, il suffit de deux points. Par exemple, les points de coordonnées : $(0 ; 12)$ et $(2 ; 4)$

Question 10



Question 11 $f(x) = (3-x)(3-2x)^2 = (3-x)(9-12x+4x^2) = 27-36x+12x^2-9x+12x^2-4x^3$
 $f(x) = -4x^3 + 24x^2 - 45x + 27$

Remarque

A partir de maintenant, on dispose de deux formes pour $f(x)$
 Suivant les questions, il faudra choisir la bonne !

Formes connues de $f(x)$

$$f(x) = (3-x)(3-2x)^2$$

$$f(x) = -4x^3 + 24x^2 - 45x + 27$$

Question 12 A gauche du signe =

$$g(x) = \frac{49}{4} - \frac{1}{4}(2x+1)^2 = \frac{49}{4} - \frac{1}{4}(4x^2 + 4x + 1) = \frac{49}{4} - x^2 - x - \frac{1}{4} = -x^2 - x + \frac{48}{4} = -x^2 - x + 12$$

A droite du signe =

$$(x+4)(3-x) = 3x - x^2 + 12 - 4x = -x^2 - x + 12$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{49}{4} - \frac{1}{4}(2x+1)^2 = -x^2 - x + 12 = (x+4)(3-x)$$

Remarque

A partir de maintenant, on dispose de trois formes pour $g(x)$
 Suivant les questions, il faudra choisir la bonne !

Formes connues de $g(x)$

$$g(x) = \frac{49}{4} - \frac{1}{4}(2x+1)^2$$

$$g(x) = -x^2 - x + 12$$

$$g(x) = (x+4)(3-x)$$

Question 13 $h(x) = (3-x)^2 = 9 - 6x + x^2$

Remarque

A partir de maintenant, on dispose de deux formes pour $h(x)$
 Suivant les questions, il faudra choisir la bonne !

Formes connues de $h(x)$

$$h(x) = (3-x)^2$$

$$h(x) = x^2 - 6x + 9$$

Question 14 a $f(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)(3-2x)(3-2x) = 0$

D'après le théorème du produit nul

Soit $3-x=0$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

Soit $3-2x=0$

$$-2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{-2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{ 3; \frac{3}{2} \right\}$

Parmi les formes connues de $f(x)$

$$f(x) = (3-x)(3-2x)^2$$

$$f(x) = -4x^3 + 24x^2 - 45x + 27$$

on choisit la forme factorisée pour utiliser le théorème du produit nul.

« résoudre $f(x) = 0$ »

seules les valeurs de x nous intéressent ... inutile de mentionner que $f(3) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

Question 14 b $M(x; y)$ est sur C_h et l'axe des abscisses

SSI

$$\begin{cases} y = h(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

On résout $h(x) = 0$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x) \times (3-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3-x=0$$

$$\Leftrightarrow -x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Parmi les formes connues de $h(x)$

$$h(x) = (3-x)^2$$

$$h(x) = x^2 - 6x + 9$$

on choisit la forme factorisée pour utiliser le théorème du produit nul.

« Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses »

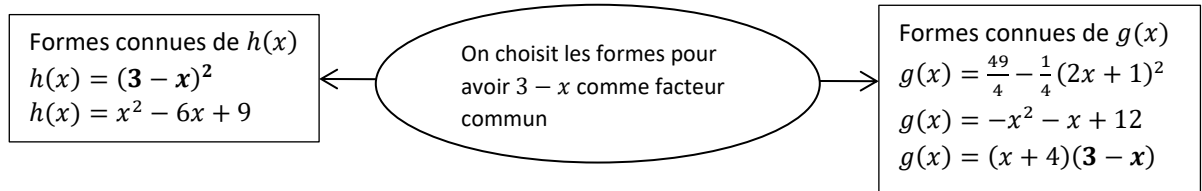
résoudre $f(x) = 0$ donne les abscisses des points d'intersections. Il ne faut pas oublier de préciser (calculer si besoin) les ordonnées

C_h et l'axe des abscisses ont un seul point d'intersection: $(3; 0)$

Question 15 a Pour résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$
 On cherche les points d'intersection de C_f et C_g
 On lit leurs abscisses
 L'ensemble des solutions **semble** être : $\{0,75 ; 2 ; 3\}$

« Résoudre **graphiquement** ... »
 avec cette méthode, on n'a **aucune certitude** :
 on obtient des valeurs approchées (même si elles
 semblent exactes).

Question 15 b



$$\begin{aligned}
 g(x) = h(x) &\Leftrightarrow (x + 4)(3 - x) = (3 - x)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x + 4) \times (3 - x) - (3 - x) \times (3 - x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (3 - x) \times ((x + 4) - (3 - x)) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (3 - x)(x + 4 - 3 + x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (3 - x) \times (2x + 1) = 0
 \end{aligned}$$

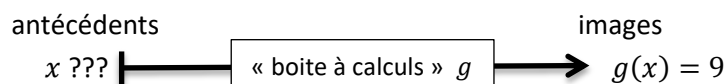
« Résoudre $g(x) = h(x)$ »
 La consigne oblige à une
 résolution **par le calcul**

d'après le théorème du produit nul

Soit $3 - x = 0$	Soit $2x + 1 = 0$
$-x = -3$	$2x = -1$
$x = 3$	$x = \frac{-1}{2}$

L'ensemble des solutions est : $\left\{\frac{-1}{2} ; 3\right\}$

Question 16 Pour comprendre (non demandé)



On cherche les valeurs de x pour lesquelles le résultat de la formule $g(x)$ vaut 9

On doit donc résoudre l'équation $g(x) = 9$

Réponse

$$\begin{aligned}
 g(x) = 9 &\Leftrightarrow -x^2 - x + 12 = 12 \\
 &\Leftrightarrow -x^2 - x = 12 - 12 \\
 &\Leftrightarrow x(-x - 1) = 0
 \end{aligned}$$

D'après le théorème du produit nul

Soit $x = 0$	Soit $-x - 1 = 0$
	$-x = 1$
	$x = -1$

9 a deux antécédents 0 et -1

Parmi les formes connues de $g(x)$

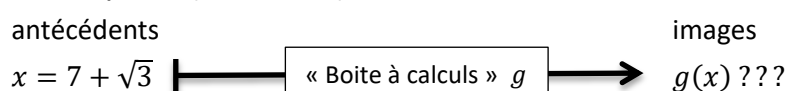
$$g(x) = \frac{49}{4} - \frac{1}{4}(2x + 1)^2$$

$$g(x) = -x^2 - x + 12$$

$$g(x) = (x + 4)(3 - x)$$

on choisit la forme développée pour
 soustraire 12 à chaque membre.

Question 17 Pour comprendre (non demandé)



On cherche le résultat de la formule quand x vaut $7 + \sqrt{3}$

On doit donc calculer $g(7 + \sqrt{3})$

Réponse

$$\begin{aligned}g(7 + \sqrt{3}) &= -(7 + \sqrt{3})^2 - (7 + \sqrt{3}) + 12 \\&= -(49 + 14\sqrt{3} + 3) - 7 - \sqrt{3} + 12 \\&= -49 - 14\sqrt{3} - 3 + 5 - \sqrt{3} = -47 - 15\sqrt{3}\end{aligned}$$

Question 18 $h(3 - \sqrt{5}) = (3 - (3 - \sqrt{5}))^2 = (3 - 3 + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$

Question 19 $g(x) = 0 \Leftrightarrow (4 + x)(3 - x) = 0 \Leftrightarrow 4 + x = 0 \text{ ou } 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } 3 = x$
L'ensemble des solutions est $\{-4; 3\}$

Interprétation graphique :

La courbe C_g coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-4; 0)$ et $(3; 0)$

Question 20 $p(x) > 0$
 $12 - 4x > 0$ en ajoutant -12 à chaque membre
 $-4x > -12$ en divisant chaque membre par -4 qui est **négatif** et non nul
 $x < \frac{-12}{-4}$
 $x < 3$
L'ensemble des solutions est : $] -\infty; 3[$

Interprétation graphique

Pour $x \in] -\infty; 3[$ la courbe C_p est au-dessus de l'axe des abscisses

On pourrait dire aussi (moins pertinent mais correct) :

Pour $x \in] -\infty; 3[$, la courbe C_p est au-dessus de la droite d'équation $y = 0$ (car une équation de l'axe des abscisses est $y = 0$)

Question 21a Pour résoudre graphiquement $f(x) = p(x)$
On cherche les points d'intersections de C_f et de C_p .
On lit leurs abscisses.
L'ensemble des solutions **semble** être $\{0,5; 2,5; 3\}$

Question 21b $f(x) = p(x)$
 $(3 - x)(3 - 2x)^2 = 12 - 4x$
 $(3 - x)(3 - 2x)^2 = 4(3 - x)$
 $(3 - x) \times (3 - 2x)^2 - 4 \times (3 - x) = 0$
 $(3 - x) \times ((3 - 2x)^2 - 4) = 0$
 $(3 - x) \times ((3 - 2x)^2 - 2^2) = 0$
 $(3 - x) ((3 - 2x) + 2) ((3 - 2x) - 2) = 0$
 $(3 - x)(5 - 2x)(1 - 2x) = 0$

Soit $3 - x = 0$	Soit $5 - 2x = 0$	Soit $1 - 2x = 0$
$-x = -3$	$-2x = -5$	$-2x = -1$
$x = 3$	$x = \frac{-5}{-2}$	$x = \frac{-1}{-2}$
	$x = \frac{5}{2}$	$x = \frac{1}{2}$

L'ensemble des solutions est bien $\{0,5; 2,5; 3\}$

Question 22 $M(x; y)$ est sur C_h et sur C_p Si et Seulement si $\begin{cases} y = h(x) \\ y = p(x) \end{cases}$

Pour calculer x , on résout l'équation $h(x) = p(x)$

$$h(x) = p(x)$$

$$(3 - x)^2 = 12 - 4x$$

$$(3 - x)^2 = 4(3 - x)$$

$$(3 - x) \times (3 - x) - 4 \times (3 - x) = 0$$

$$(3 - x) \times ((3 - x) - 4) = 0$$

$$(3 - x)(3 - x - 4) = 0$$

$$(3 - x)(-x - 1) = 0$$

$$\text{Soit } 3 - x = 0$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

$$\text{Soit } -x - 1 = 0$$

$$-x = 1$$

$$x = -1$$

Les points d'intersections de C_h et C_p ont pour abscisses -1 et 3

Pour calculer les ordonnées, on calcule :

- soit $h(3)$, soit $p(3)$ puisque ces deux formules donnent le même résultat pour $x = 3$

$$p(3) = 12 - 4(3) = 0$$

- soit $h(-1)$, soit $p(-1)$ puisque ces deux formules donnent le même résultat pour $x = -1$

$$p(-1) = 12 - 4(-1) = 16$$

Les points d'intersections de C_h et C_p ont pour coordonnées $(3; 0)$ et $(-1; 16)$