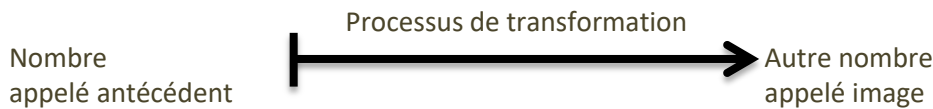


Apprendre (cela fait partie du travail !)

Une **fonction** est un processus qui transforme un nombre en un autre nombre.



Le processus de transformation est souvent décrit à l'aide d'une formule à appliquer pour trouver l'image.

♥ L'**ensemble de définition** d'une fonction est l'**ensemble des nombres pour lesquels on peut calculer une image**.

Notation

La plupart du temps, on donne un nom au processus : on utilise une lettre souvent $f, g, h, \dots$

On pourrait pour décrire le processus de transformation en français. Par exemple :

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par « multiplié par 3 puis ajouter 7 puis enfin mettre au carré »

Ce qui veut dire que :

- tout nombre réel a une image ($\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels formé de tous les nombres qui permettent de mesurer une longueur et de leurs opposés)
- le nombre 85 a pour image $(3 \times 85 + 7)^2$, le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a pour image $(3 \times ((1 + \frac{\sqrt{5}}{2}) + 7))^2, \dots$
plus généralement un nombre quelconque x a pour image $(3x + 7)^2$

Mais décrire le processus en français :

- peut être très ambigu « divisé par 7 divisé par 3 » veut dire $\frac{\frac{x}{7}}{3}$ ou $\frac{x}{\frac{7}{3}}$?
- devenir vite très compliqué comment décrire $6x^2 + 7 - \frac{(3x+4)^2-5}{7x^3-4}$?

On préfère utiliser une formule appliqué à un nombre quelconque. Pour désigner un nombre quelconque, on utilise une lettre $x, t, \dots$ appelé une **variable**. On dira : « soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x + 7)^2$ »

Savoir donner la nature des objets

Extrait d'un énoncé de DS : « soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(t) = \sqrt{t-1}$ »

1. $[1; +\infty[$ est un **ensemble** : ici c'est l'ensemble de définition de h (les nombres qui ont une image sont ceux supérieurs ou égaux à 1)
2. h est une **fonction** : un objet complètement nouveau et complexe, vu en fin de collège. Avant de le rencontrer, les lettres que vous utilisiez désignaient des nombres, des points, des droites, ...
Attention h n'est ni un nombre (écrire $h = 5$ est incorrect), ni une formule (écrire $h = \sqrt{t-1}$ est incorrect)
3. t est la variable de la fonction h . t désigne un **nombre** quelconque supérieur ou égal à 1 (puisque'il doit être dans $[1; +\infty[$ d'après l'énoncé)
4. $h(t)$ décrit une « **formule** » : une relation mathématique qui utilise une lettre pour représenter une grandeur qui peut être modifiée.
Plus exactement, $h(t)$ désigne un **nombre** (l'image de t par la fonction h) tout en décrivant un processus de calcul permettant d'obtenir cette image.

Une autre notation possible (en seconde vous devez surtout « savoir la lire »)

Extrait d'un énoncé de DS :

$$\begin{array}{ccc} g: [-7; 10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^2 - 9 \end{array}$$

1. Dans le cadre des fonctions, la flèche $\longrightarrow$ se lit « dans » et la flèche $\longmapsto$ se lit « fait correspondre »
Ainsi, g est la fonction
 - définie sur $[-7; 10]$
 - à valeurs dans $\mathbb{R}$ (toutes les images sont dans $\mathbb{R}$). En seconde, on se limite à ce cas.
 - qui à un nombre x fait correspondre $x^2 - 9$
2. Seuls les nombres de $[-7; 10]$ ont une image. Par exemple, $g(20)$ n'existe pas.
 $[-7; 10]$ désigne l'**ensemble** de définition.
3. g désigne une **fonction**. Pour définir une fonction, on précise son ensemble de définition et on décrit le processus de « correspondance » souvent par une formule ou une situation.
4. x est la variable de la fonction : c'est un **nombre** entre -7 (*compris*) et 10 (*compris*).
5. $g(x)$ désigne la **formule** (plus exactement le **nombre** résultat du processus de transformation)
6. $g(x) = x^2 - 9$
La consigne « écrire $g(x)$ **en fonction de** x » veut dire indifféremment :
 - « donner **une** formule permettant de calculer l'image dès qu'on connaît x »
 - « écrire $g(x) = \dots$ où dans le deuxième membre, il n'y a que x que l'on ne connaît pas »

Plusieurs formules peuvent convenir. Dans cet exemple, on pourrait donner :

$g(x) = (x+1)^2 - 9$	donné dans l'énoncé
$gx) = x^2 + 2x - 8$	forme développée (il n'y a plus de parenthèse et tout est simplifiée)
$g(x) = (x-8)(x+1)$	forme factorisée (résultat d'une multiplication et facteurs de degré le plus petit possible)

Savoir donner l'ensemble de définition d'une fonction

1. Parfois, il suffit de savoir lire l'énoncé puisque l'ensemble de définition y est donné !
« soit f la fonction définie sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ par ... »
2. Extrait de DS : « soit w la fonction définie par $w(x) = \sqrt{4-x}$. Donner son ensemble de définition »
Ici, ce qui est sous-entendu, c'est que l'ensemble de définition est l'ensemble de tous les nombres pour lesquels le résultat existe. Par exemple : 10 n'a pas d'image car $\sqrt{-10}$ n'existe pas.

Pour trouver l'ensemble de définition, on repère les opérations « impossibles »

Dans $\sqrt{4-x}$ il y a une soustraction (toujours possible) et une racine carrée (possible uniquement pour un nombre positif ou nul)

$$4 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x \geq -4 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4$$

L'ensemble de définition de h est $] -\infty; 4]$

$\Leftrightarrow$ veut dire que les inéquations ont exactement les mêmes solutions

3. Parfois la fonction est définie par une situation. L'ensemble de définition découle de la situation (voir ci-après).

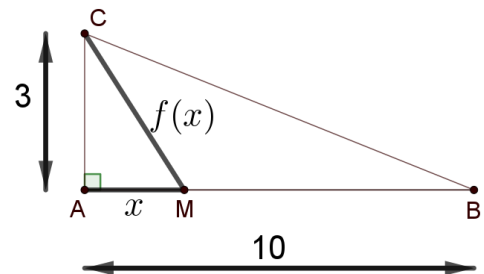
Savoir modéliser par une fonction

Enoncé

Le triangle ABC est rectangle en A . M est un point de $[AB]$.

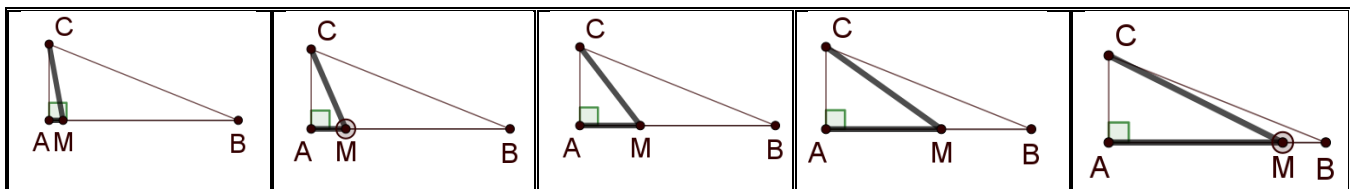
On pose : $x = AM$. f est la fonction qui à x fait correspondre CM

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Ecrire $f(x)$ en fonction de x



Correction

1. x est la variable. Le point M est quelconque sur le segment ... quand x varie, la position de M change !
Par conséquent la mesure de CM aussi. La figure est donnée dans un cas particulier mais il faut vous faire « un film » : imaginer toutes les positions possibles de M .



Quand M est sur A : $x = AM = 0$

Quand M est sur B : $x = BM = 10$

donc l'ensemble de définition de f est $[0 ; 10]$

2. Dans le triangle ABM rectangle en A , on a : $AM = x$ et $AC = 3$

D'après le théorème de Pythagore : $CM^2 = AM^2 + AC^2 = x^2 + 9$

donc $f(x) = CM = \sqrt{x^2 + 9}$ (que l'on ne peut pas simplifier car il n'existe pas de formule avec les additions et les racines)

Pour s'échauffer

Ex 1 : Soit f la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par $f(x) = \frac{-6x+7}{5}$. Calculer, si possible, $f(0)$ et $f\left(\frac{5}{7}\right)$ et $f(-6)$

Ex 2 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 9x^2 - 24x + 16$

- 1) Déterminer l'image de -3 par g
- 2) Trouver les antécédents de 16 par g
- 3) Calculer $g(3 - \sqrt{3})$
- 4) Quels nombres ont pour image 0 par g ?

Ex 3 : Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x+3}{x-4}$

- a) Donner l'ensemble de définition de h
- b) Calculer $h\left(-\frac{11}{7}\right)$

En route vers les DS

Ex 4 : 1) Soit A la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $A(x) = 9x^2 - (5 - 2x)^2$

- a) Développer $A(x)$
- b) Factoriser $A(x)$
- c) Résoudre $A(x) = 0$
- d) Résoudre $A(x) = 20x$

2) Soit B la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $B(x) = (x + 5)^2 - (3x + 7)^2$

- a) Développer $B(x)$
- b) Factoriser $B(x)$
- c) Calculer $B(5\sqrt{2})$
- d) Résoudre $B(x) = 0$

Ex 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 45 - 5(3x - 2)^2$

- 1) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = -5(3x - 5)(3x + 1)$
- 2) Calculer $f\left(\frac{2}{3}\right)$ puis $f(\sqrt{5})$
- 3) Résoudre $f(x) = 0$ puis $f(x) = 25$

Les réponses

Ex 1 : Soit f la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par $f(x) = \frac{-6x+7}{5}$. Calculer, si possible, $f(0)$ et $f\left(\frac{5}{7}\right)$ et $f(-6)$

Remarque : $f(x) = \frac{-6x+7}{5} = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$

- $f(0) = \frac{-6(0)+7}{5} = \frac{7}{5}$

On dit que : « **L'**image de 0 est $\frac{7}{5}$ »

ou que

« $\frac{7}{5}$ est **un** antécédent de 0 »

Noter l'utilisation d'un article défini « L' »
Car un nombre (ici 0) a une **unique** image !

Noter l'utilisation d'un article indéfini « un »
Car un nombre, ici $\frac{7}{5}$, peut avoir plusieurs antécédents.

- $f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{-6\left(\frac{5}{7}\right)+7}{5} = \frac{-\frac{30}{7}+7}{5} = \frac{-\frac{30}{7}+\frac{49}{7}}{5} = \frac{\frac{19}{7}}{5} = \frac{19}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{19}{35}$

- $f(-6)$ n'existe pas car -6 n'est pas dans l'ensemble de définition $[-5 ; 5]$
 -6 n'a pas d'image par f

Ex 2 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 9x^2 - 24x + 16$

Rappel : $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses possibles pour les points d'une droite graduée.
Tous les nombres rencontrés en collège ou en seconde sont dans $\mathbb{R}$

Question 1 Déterminer l'image de -3 par g



On remplace x par (-3) dans la formule $9x^2 - 24x + 16$

$$g(-3) = 9(-3)^2 - 24(-3) + 16 = 9 \times 9 + 72 + 16 = 81 + 72 + 16 = 169$$

-3 a pour image 169.

Question 2 Trouver les antécédents de 16 par g



On cherche les valeurs de x pour lesquelles, la formule $9x^2 - 24x + 16$ a pour résultat 16

$$g(x) = 16$$

Il s'agit donc de résoudre une équation.
On remplace $g(x)$ par la formule

$$9x^2 - 24x + 16 = 16$$

Cette équation est du second degré : on pense au théorème du produit nul. On commence par avoir 0 (nul) dans un membre

$$9x^2 - 24x = 0$$



On factorise pour avoir un produit (résultat d'une multiplication)

$$9 \times x \times x - 24 \times x = 0$$

On reconnaît le facteur commun $\times x$

$$(9x - 24) \times x = 0$$

D'après le théorème du produit nul

« le résultat d'une multiplication vaut 0 si et seulement si un des nombres de la multiplication vaut 0 »

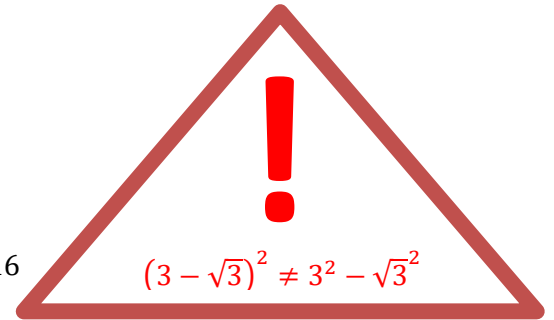
$$\begin{array}{l|l} 9x - 24 = 0 & x = 0 \\ 9x = 24 & \\ x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} & \end{array}$$

16 a deux antécédents : 0 et $\frac{8}{3}$

Question 3

Calculer $g(3 - \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} g(3 - \sqrt{3}) &= 9(3 - \sqrt{3})^2 - 24(3 - \sqrt{3}) + 16 \\ &= 9(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) - 24(3 - \sqrt{3}) + 16 \\ &= 9(9 - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3) - 72 + 24\sqrt{3} + 16 \\ &= 9(9 - 6\sqrt{3} + 3) - 56 + 24\sqrt{3} \\ &= 81 - 54\sqrt{3} + 27 - 56 + 24\sqrt{3} \\ &= 52 - 30\sqrt{3} \end{aligned}$$



Pour développer plus vite $(3 - \sqrt{3})^2$

on peut utiliser l'**identité remarquable** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3$ et $b = \sqrt{3}$

$$\text{de tête ou au brouillon } \begin{cases} a^2 = (3)^2 = 9 \\ 2ab = 2 \times 3 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \\ b^2 = \sqrt{3}^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(3 - \sqrt{3}) &= 9(3 - \sqrt{3})^2 - 24(3 - \sqrt{3}) + 16 \\ &= 9(9 - 6\sqrt{3} + 3) - 72 + 24\sqrt{3} + 16 \\ &= 81 - 54\sqrt{3} + 27 - 56 + 24\sqrt{3} \\ &= 52 - 30\sqrt{3} \end{aligned}$$

Question 4

Quels nombres ont pour image 0 par g ?

On cherche les antécédents de 0

$$g(x) = 0$$

$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$

L'équation est du second degré, on pense au théorème du produit nul

Pour factoriser, on connaît deux méthodes: soit la **méthode du facteur commun**, soit l'utilisation d'une **identité remarquable**.

Ici, on ne voit pas facteur commun aux trois termes $9x^2$; $-24x$ et 16

On va tenter d'utiliser une identité remarquable. On cherche donc à identifier une des trois formes :

- $a^2 - b^2$ ce n'est pas celle-là : il y a 2 termes mais dans $9x^2 - 24x + 16$ il y en a 3
- $a^2 + 2ab + b^2$ il y a bien trois termes mais dans $9x^2 - 24x + 16$ il y a des plus et des -
- $a^2 - 2ab + b^2$ il y a 3 termes, des + et des -, comme dans $9x^2 - 24x + 16$

La seule identité qui pourrait « coller » est donc $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
 Il faut vérifier avec précision que c'est bien le cas.

$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$(3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = 0$$

$$(3x - 4)^2 = 0$$

$$(3x - 4)(3x - 4) = 0$$

d'après le théorème du produit nul

$$3x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 4 = 0$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

On a bien la forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ $b = 4$

On applique la formule $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Attention à ne pas confondre $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$
 avec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

on obtient la même équation : il n'y aura qu'une solution

Le seul nombre qui a pour image 0 est $\frac{4}{3}$

Ex 3 : Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x+3}{x-4}$ a) Donner l'ensemble de définition de h b) Calculer $f\left(-\frac{11}{7}\right)$

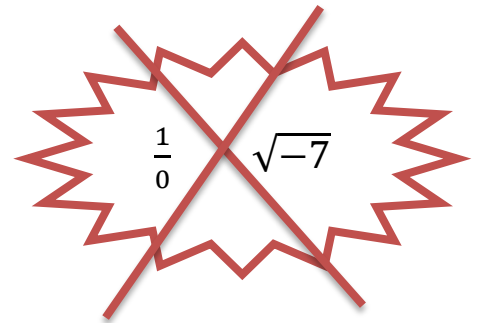
Question a On cherche tous les nombres réels qui ont une image par h .

Pour cela, on va se concentrer sur tous ceux qui ne peuvent pas en avoir : cela se produit quand une opération est mathématiquement impossible à réaliser. En seconde, les seules usuelles qu'on ne peut pas faire sont :

- Diviser par 0
- Prendre la racine carrée d'un nombre négatif

$$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Comme la division par 0 n'existe pas, 4 n'a pas d'image :
 il n'est pas dans l'ensemble de définition.



L'ensemble de définition de h est constitué de tous les nombres réels sauf 4.

Ce qui se note $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ ou parfois $\mathbb{R} - \{4\}$ et qui se lit « $\mathbb{R}$ privé de 4 »

Question b Calculer $h\left(-\frac{11}{7}\right)$

$$h\left(-\frac{11}{7}\right) = \frac{-\frac{11}{7} + 3}{-\frac{11}{7} - 4} = \frac{-\frac{11}{7} + \frac{21}{7}}{-\frac{11}{7} - \frac{28}{7}} = \frac{\frac{10}{7}}{-\frac{39}{7}} = \frac{10}{7} \times \frac{-7}{39} = -\frac{10}{39} \times \frac{7}{7} = -\frac{10}{39}$$

Ex 4 :

Question 1

a) $A(x) = 9x^2 - (5 - 2x)^2 = 9x^2 - (25 - 20x + 4x^2) = 5x^2 + 20x - 25$

b) $A(x) = (3x)^2 - (5 - 2x)^2 = ((3x) + (5 - 2x))((3x) - (5 - 2x)) = (x + 5)(5x - 5)$

c) $A(x) = 0$
 $(x + 5)(5x - 5) = 0$
 $x + 5 = 0$ ou $5x - 5 = 0$

L'équation est du second degré,
 donc on choisit la forme factorisée et on applique le théorème du produit nul

$$x = -5 \text{ ou } x = 1$$

L'ensemble des solutions est $\{-5 ; 1\}$

d) $A(x) = 20x$

$$5x^2 + 20x - 25 = 20x$$

$$5x^2 + 20x - 25 - 20x = 0$$

$$5x^2 - 25 = 0$$

$$5(x^2 - 5) = 0$$

$$5(x^2 - \sqrt{5}^2) = 0$$

$$5(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$$

On choisit la forme développée de $A(x)$ car elle contient aussi $20x$
l'équation est du second degré, on va tenter d'utiliser le théorème du produit nul (égal à 0). En ajoutant $-20x$ à chaque membre on obtient 0

on va factoriser ... commençons par factoriser 5

L'un des facteurs vaut 0 (et ce n'est pas 5 !)

$$\text{Soit } x + \sqrt{5} = 0 \quad \text{soit } x - \sqrt{5} = 0$$

$$x = -\sqrt{5} \text{ ou } x = \sqrt{5}$$

L'ensemble des solutions est $\{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$

Question 2

a) $B(x) = (x + 5)^2 - (3x + 7)^2 = x^2 + 10x + 25 - (9x^2 + 42x + 49)$
 $= x^2 + 10x + 25 - 9x^2 - 42x - 49 = -8x^2 - 32x - 24$

b) $B(x) = (x + 5)^2 - (3x + 7)^2 = ((x + 5) + (3x + 7))((x + 5) - (3x + 7))$
 $= (x + 5 + 3x + 7)(x + 5 - 3x - 7) = (4x + 12)(-2x - 2)$

c) Le plus simple est de choisir la forme développée de $B(x)$

$$B(5\sqrt{2}) = -8(5\sqrt{2})^2 - 32(5\sqrt{2}) - 24 = -8 \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} - 32 \times 5 \times \sqrt{2} - 24$$

$$= -400 - 160\sqrt{2} - 24 = -424 - 160\sqrt{2}$$

d) $B(x) = 0$

$$(4x + 12)(-2x - 2) = 0$$

$$4x + 12 = 0 \text{ ou } -2x - 2 = 0$$

$$x = -3 \text{ ou } x = -1$$

L'ensemble des solutions est $\{-3 ; -1\}$

l'équation est du second degré, on choisit la forme factorisée
pour pouvoir utiliser le théorème de « la multiplication qui vaut 0 »

Exercice 5

Question 1

- D'une part $f(x) = 45 - 5(3x - 2)^2$ car c'est écrit dans l'énoncé
 $= 45 - 5(9x^2 - 12x + 4) = 45 - 45x^2 + 60x - 20 = -45x^2 + 60x + 25$
- D'autre part $-5(3x - 5)(3x + 1) = -5(9x^2 + 3x - 15x - 5) = -45x^2 - 15x + 75x + 25$
 $= -45x^2 + 60x + 25$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 45 - 5(3x - 2)^2 = -45x^2 + 60x + 25 = -5(3x - 5)(3x + 1)$

On dispose maintenant de trois formules pour $f(x)$... dans chaque question, il faut choisir la plus adaptée !

Question 2

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 45 - 5\left(3 \times \frac{2}{3} - 2\right)^2 = 45 - 5(2 - 2)^2 = 45$$

$$f(\sqrt{5}) = -45(\sqrt{5})^2 + 60(\sqrt{5}) + 25 = -45 \times 5 + 60\sqrt{5} + 25 = -200 + 60\sqrt{5}$$

Question 3

$$f(x) = 0$$

$$-5 \times (3x - 5) \times (3x + 1) = 0$$

D'après le théorème du produit nul, l'un des facteurs vaut 0 (et ce n'est pas 5 !)

$$\begin{array}{l|l|l} -5 = 0 & \text{ou} & 3x - 5 = 0 \\ \text{ce cas n'est pas possible} & & x = \frac{3}{5} \end{array} \quad \begin{array}{l|l} & \text{ou} & 3x + 1 = 0 \\ & & x = -\frac{1}{3} \end{array}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{3}{5}; -\frac{1}{3}\right\}$

$$f(x) = 25$$

$$-45x^2 + 60x + 25 = 25$$

$$-45x^2 + 60x + 25 - 25 = 0$$

$$-45x \times x + 60 \times x = 0$$

$$(-45x + 60) \times x = 0$$

D'après le théorème du produit nul :

$$-45x + 60 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0$$

$$x = \frac{-60}{-45} = \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad x = 0$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{4}{3}; 0\right\}$