

Vocabulaire 1 Qu'obtient-on quand on substitue $3 - 2\sqrt{8}$ à x dans la formule $x^2 - \sqrt{2}$?

Vocabulaire 2 a et b sont deux réels tels que $2a + b = 10$,

- 1) Exprimer a en fonction de b 2) Exprimer b en fonction de a

Vocabulaire 3 On considère l'équation $x + 2y = 60$.

- 1) Donner 2 solutions de l'équation
2) Que doit valoir y pour que $(-7 ; y)$ soit une solution de l'équation ?
3) Que doit valoir x pour que $(x ; 3)$ soit une solution de l'équation ?

Vocabulaire 4 On considère le système $\begin{cases} 4x + 3y = 6 & (1) \\ 2x + y = 4 & (2) \end{cases}$

- a) $(-3 ; 6)$ est-il solution de l'équation (1) ? c) $(3 ; -2)$ est-il solution de l'équation (2) ?
b) $(-3 ; 6)$ est-il solution du système ? d) $(3 ; -2)$ est-il solution du système ?

Ex 5 On considère le système $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - 5y = 4 \end{cases}$

- a) A partir de la première équation, écrire x en fonction de y puis écrire y en fonction de x
b) A partir de la seconde équation, écrire x en fonction de y puis écrire y en fonction de x
c) Dans la seconde équation, remplacer x par $11 - 3y$. En déduire la valeur de y puis celle de x

Ex 6 Résoudre par substitution $\begin{cases} 7x - 3y = 20 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Méthode à appliquer :

- On choisit une des deux équations, on choisit une des deux inconnues.
On exprime cette inconnue choisie en fonction de l'autre.
Vigilance : bien penser son choix pour éviter (si possible) des calculs pénibles
- Dans l'autre équation, on remplace (substitue) l'inconnue choisie par la formule trouvée dans le 1. On obtient alors une équation n'ayant plus qu'une seule inconnue que l'on résout.
- Il est alors facile de trouver l'autre valeur
- Comme on n'a pas raisonné par équivalence, on établit la réciproque : on teste que les valeurs trouvées sont bien solutions du système.

Facultatif 7 a) Résoudre par substitution $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$

b) Résoudre par substitution $\begin{cases} 3x - 2y = -17 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$

Les corrections sont en vidéos.

Ex 8 Résoudre par substitution $\begin{cases} 5x + 4y = -10 \\ x + 3y = -20 \end{cases}$ $\begin{cases} -5x + y = 7 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} -6x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$

Ex 9 1) Résoudre directement **avec la calculatrice** le système $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$

- Pour TI (83 Premium utilisée) <https://www.youtube.com/watch?v=jmqwHyN5en4>
- Pour Casio Graph 35 + https://www.youtube.com/watch?v=4D_Lglw6V9I
- Pour NumWorks <https://www.youtube.com/watch?v=5Riyo0AjoZ4>

- 2) On rappelle que les calculatrices sont des outils et qu'elles donnent parfois un résultat faux. Par exemple :
 $(12\,345,678\,9)^2 = 152\,415\,787,501\,905\,21$ mais votre calculatrice tronque la réponse : 152 415 787,5
Aussi, la calculatrice n'est pas un outil de justification : en DS, sauf mention du contraire, on attend une réponse rédigée et détaillée.

Démontrer le résultat en résolvant le système par substitutions.

Vocabulaire 1

Substituer veut dire « remplacer », « prendre la place de »

Ainsi, « substituer $3 - 2\sqrt{8}$ à x dans la formule $x^2 - \sqrt{2}$ » revient à dire « calculer $x^2 - \sqrt{2}$ pour x valant $3 - 2\sqrt{8}$ ».

Quand on substitue ne pas oublier les parenthèses sous-entendues : on remplace x par $(3 - 2\sqrt{8})$

$$x^2 - \sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{8})^2 - \sqrt{2}$$

$$= (3 - 2\sqrt{8}) \times (3 - 2\sqrt{8}) - \sqrt{2}$$

$$= 9 - 6\sqrt{8} - 6\sqrt{8} + 32 - \sqrt{2}$$

$$= 41 - 12\sqrt{8} - \sqrt{2} \quad (\text{fin de la piste verte})$$

$$= 41 - 12\sqrt{2 \times 4} - \sqrt{2}$$

$$= 41 - \sqrt{4} \times \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$= 41 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$= 41 - 3\sqrt{2} \quad (\text{fin de la piste rouge})$$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
pour tout a positif et tout b positif

Brouillon pour calculer $(3 - 2\sqrt{8}) \times (3 - 2\sqrt{8})$

$$3 \times 3 = 9$$

$$3 \times (-2\sqrt{8}) = -3 \times 2 \times \sqrt{8} = -6\sqrt{8}$$

$$-2\sqrt{8} \times 3 = -6\sqrt{8}$$

$$-2\sqrt{8} \times (-2\sqrt{8}) = +2 \times \sqrt{8} \times 2 \times \sqrt{8} = 4 \times 8 = 32$$

Vocabulaire 2

Question 1 (piste verte)

« Exprimer a en fonction de b »

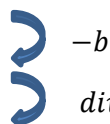
veut dire « Ecrire $a =$ une formule où il n'y a que b que l'on ne connaît pas »

Pour cela, on utilise les règles apprises sur les égalités « ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre ... », « multiplier ou diviser chaque membre par un même nombre non nul ... »

$$2a + b = 10$$

$$2a = 10 - b$$

$$a = \frac{10-b}{2}$$



$-b$

divise par 2 qui est non nul

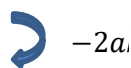
Question 2 (piste verte)

« Exprimer b en fonction de a »

veut dire « Ecrire $b =$ une formule où il n'y a que a que l'on ne connaît pas »

$$2a + b = 10$$

$$b = 10 - 2a$$



$-2a$

Vocabulaire 3

Cette équation a deux inconnues x et y donc pour donner une solution il faut donner une valeur à x et une valeur à y pour que l'égalité $x + 2y = 60$ soit vraie.

Question 1 Cette équation a une infinité de solution pour en trouver, il est facile d'en deviner. Par exemples :

- $x = 10$ et $y = 25$ est une solution puisque $10 + 2 \times 25 = 60$

Cette solution se note $(10 ; 25)$

L'usage est de donner valeur de x puis la valeur de y (comme dans ordre alphabétique).

Plus rigoureusement, faudrait préciser « l'équation $x + 2y = 60$ d'inconnue $(x ; y)$ »

- $x = 50$ et $y = 5$ est une solution puisque $50 + 2 \times 5 = 60$
Cette solution se note $(50 ; 5)$

Question 2

La valeur de x est connue : $x = -7$.

On remplace donc x par -7 dans l'équation $x + 2y = 60$.

$$-7 + 2y = 60$$

$$2y = 60 + 7$$

$$y = \frac{67}{2}$$

Donc $(-7 ; \frac{67}{2})$ est une solution.



divise par 2 qui est non nul

Question 3

La valeur de x est connue : $y = 3$.

On remplace donc y par 3 dans l'équation $x + 2y = 60$.

$$x + 2(3) = 60$$

$$x = 60 - 6$$

$$x = 54$$

Donc $(54 ; -6)$ est une solution.



Vocabulaire 4

L'accolade { veut dire "et"

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 & (1) \\ 2x + y = 4 & (2) \end{cases}$$

L'équation numérotée (1) est $4x + 3y = 6$

L'équation numérotée (2) est $2x + y = 4$

L'équation $4x + 3y = 6$ a une infinité de solutions

L'équation $2x + y = 4$ a une infinité de solutions

Les **solutions du système** $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ sont les solutions **communes** aux deux équations.

Question a

pour $x = -3$ et $y = 6$ $4x + 3y = 4(-3) + 3(6) = -12 + 18 = 6$

L'égalité est vérifiée donc $(-3 ; 6)$ est une solution de l'équation (1).

Question b

pour $x = -3$ et $y = 6$ $2x + y = 2(-3) + 6 = 0$

On ne trouve pas 4, donc $(-3 ; 6)$ n'est pas une solution de l'équation (2)

Donc $(-3 ; 6)$ n'est pas solution du système.

Question c

pour $x = 3$ et $y = -2$ $2x + y = 2(3) + (-2) = 4$

donc $(3 ; -2)$ est une solution de l'équation (2)

Question d

pour $x = 3$ et $y = -2$

- $4x + 3y = 4(3) + 3(-2) = 12 - 6 = 6$

donc $(3 ; -2)$ est une solution de l'équation (1).

- $2x + y = 2(3) + (-2) = 4$

donc $(3 ; -2)$ est une solution de l'équation (2)

Donc $(-3 ; 6)$ est une **solution commune** aux deux équations

Donc $(3 ; -2)$ est une solution du système.

Exercice 5

Question a

$$\begin{array}{l} x + 3y = 11 \\ x = 11 - 3y \end{array}$$

On a $x = \dots$ avec dans le second membre une formule qui ne dépend que de y

On a écrit x en « fonction de y »

$$\begin{array}{l} x + 3y = 11 \\ 3y = 11 - x \\ x = \frac{11-y}{3} \end{array}$$

On a $y = \dots$ avec dans le second membre une formule qui ne dépend que de x

On a écrit y en « fonction de x »

Question b

$$\begin{array}{l} 2x - 5y = 4 \\ 2x = 4 + 5y \\ x = \frac{4+5y}{2} \end{array}$$

On a $x = \dots$ avec dans le second membre une formule qui ne dépend que de y

On a écrit x en « fonction de y »

$$\begin{array}{l} 2x - 5y = 4 \\ -5y = 4 - 2x \\ y = \frac{4-2x}{-5} \end{array}$$

en multipliant numérateur et dénominateur par -1

$$y = \frac{-4+2x}{5}$$

On a $y = \dots$ avec dans le second membre une formule qui ne dépend que de x

On a écrit y en « fonction de x »

Question c

D'après la question 1, on sait que $x = 11 - 3y$
donc à la place de x on peut écrire $11 - 3y$

Dans $2x - 5y = 4$, on remplace x par **(11 - 3y)**

$$2(11 - 3y) - 5y = 4$$

On remarque que dans cette équation, il n'y a plus que des y donc on va pouvoir la résoudre

$$22 - 6y - 5y = 4$$

$$\text{Donc } -11y = 4 - 22$$

$$\text{Donc } -11y = -18$$

$$\text{Donc } y = -\frac{18}{-11} = \frac{18}{11}$$

Comme $x = 11 - 3y$ on a donc, en remplaçant y par $\frac{18}{11}$, $x = 11 - 3\left(\frac{18}{11}\right) = 11 - \frac{54}{11} = \frac{121}{11} - \frac{54}{11} = \frac{67}{11}$

Ainsi : $x = \frac{67}{11}$ et $y = \frac{18}{11}$ est la seule solution **possible** du système.

Reste à vérifier que $\left(\frac{67}{11}; \frac{18}{11}\right)$ est bien une solution du système

$$\begin{cases} x + 3y = \frac{67}{11} + 3\left(\frac{18}{11}\right) = \frac{67}{11} + \frac{54}{11} = \frac{121}{11} = 11 \\ 2x - 5y = 2\left(\frac{67}{11}\right) - 5\left(\frac{18}{11}\right) = \frac{134}{11} - \frac{90}{11} = \frac{44}{11} = 4 \end{cases}$$

$\left(\frac{67}{11}; \frac{18}{11}\right)$ est bien la seule solution du système.

Ex 6 Résoudre par substitution $\begin{cases} 7x - 3y = 20 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Bien prendre le temps de travailler cet exemple.

- On choisit une équation et une inconnue

Conseil : parmi les coefficients de x et de y , repérer (si possible) 1 ou -1 ou éventuellement 2, 5, 4 ...

Dans sa « tête »

- Si on choisit $7x - 3y = 20$ et que l'on écrit $x = \dots$
le coefficient de x étant 7 on devra diviser par 7, à la fin on aura $x = \frac{20+3y}{7}$... pas simple !
- Si on choisit $7x - 3y = 20$ et que l'on écrit $y = \dots$ on aura :
le coefficient de y étant -3 on devra diviser par -3 , à la fin on aura $y = \frac{-20+7x}{3}$... pas simple !
- Si on choisit $2x - y = 3$ et que l'on écrit $x = \dots$
le coefficient de x étant 2 on devra diviser par 2, à la fin on aura $x = x = \frac{3+y}{2}$... pas très simple !
- Si on choisit $2x - y = 3$ et que l'on écrit $y = \dots$
le coefficient de y étant -1 on devra diviser par -1 ... pas trop difficile.

On choisit donc la deuxième équation pour écrire $y = \dots$

- A partir de la deuxième équation:

$$2x - y = 3$$

$$-y = 3 - 2x$$

$$y = -1(3 - 2x)$$

$$y = -3 + 2x \quad (3)$$

On donne le numéro (3) à cette relation car on va la réutiliser plus loin.

-  $-2x$
on divise par -1 qui est non nul
Ce qui revient à multiplier par -1 car -1 est son propre inverse ! $-1 \times (-1) = 1$

- On substitue (remplaçant) dans l'autre équation

Puisque l'on doit avoir $y = -3 + 2x$ à la place de y on peut écrire $(-3 + 2x)$

$$7x - 3y = 20$$

$$7x - 3(-3 + 2x) = 20$$

On obtient une équation qui n'a plus qu'une seule inconnue : on peut la résoudre !

$$7x + 9 - 6x = 20$$

$$x + 9 = 20$$

$$x = 20 - 9$$

$$x = 11$$

- En reportant dans (3)

On remplace x par 11 dans l'équation numérotée (3) $y = -3 + 2x$

$$y = -3 + 2x = -3 + 2(11) = -3 + 22 = 19$$

- Réciproque

Ci-dessus, on a montré que « si $(x; y)$ est solution du système alors forcément $x = 11$ et $y = 19$ »

La seule solution possible est $(11; 19)$ ou alors il n'y a pas de solution au système

Mais comme on n'a pas raisonné par équivalence, il reste à tester si $(11; 19)$ est bien solution

Pour prendre une analogie :

« Si un entier se termine par 2 alors il est pair » est une proposition vraie.

Mais sa réciproque « Si un entier est pair alors il se termine par 2 » est fausse.

Dans notre cas, il reste à tester la réciproque.

On a prouvé (pour l'instant) qu'il n'y a pas d'autre possibilité en dehors de (11 ; 19) mais on n'a pas prouvé que (11 ; -19) est bien solution.

$$\begin{cases} 7x - 3y = 7(11) - 3(19) = 77 - 57 = 20 \\ 2x - y = 2(11) - (19) = 22 - 19 = 3 \end{cases}$$

donc $x = 11$ et $y = 19$ est bien solution du système et c'est la seule.

Facultatif 7

- $$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$$

Correction disponible en vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=24VsDZK6bN0>

- $$\begin{cases} 3x - 2y = -17 \\ -x + y = 6 \end{cases}$$

Correction en vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=tzOCBkFZgUI>

Ex 8

Résoudre par substitution
$$\begin{cases} 5x + 4y = -10 & (1) \\ x + 3y = -20 & (2) \end{cases}$$

Dans sa « tête »

- Dans (1), le coefficient de x est 5, donc pour $x = \dots$ on devra diviser par 5
- Dans (1), le coefficient de y est 4, donc pour $y = \dots$ on devra diviser par 4
- Dans (2), le coefficient de x est 1, donc pour $x = \dots$ on devra diviser par 1
- Dans (2), le coefficient de y est 3, donc pour $y = \dots$ on devra diviser par 3



On choisit l'équation (2)
pour écrire $x = \dots$

- A partir de (2):
$$x + 3y = -20$$
$$x = -20 - 3y \quad (3)$$
- En substituant (remplaçant) dans l'autre équation (1)
$$5x + 4y = -10$$
$$5(-20 - 3y) + 4y = -10$$
$$-100 - 15y + 4y = -10$$
$$-11y - 100 = -10$$
$$-11y = -10 + 100$$
$$-11y = 90$$
$$y = \frac{90}{-11} = -\frac{90}{11}$$

- En reportant dans (3)

$$x = -20 - 3y = -20 - 3\left(-\frac{90}{11}\right) = -20 + \frac{270}{11} = -\frac{220}{11} + \frac{270}{11} = \frac{50}{11}$$

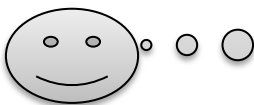
- Réciproque

$$\begin{cases} 5x + 4y = 5\left(\frac{50}{11}\right) + 4\left(-\frac{90}{11}\right) = \frac{250}{11} - \frac{360}{11} = -\frac{110}{11} = -10 \\ x + 3y = \left(\frac{50}{11}\right) + 3\left(-\frac{90}{11}\right) = \frac{50}{11} - \frac{270}{11} = -\frac{220}{11} = -20 \end{cases}$$

donc $x = \frac{50}{11}$ et $y = -\frac{90}{11}$ est la seule solution du système.

En DS, quand la calculatrice est autorisée, on pose le calcul puis on écrit le résultat lu (inutile de détailler)

Résoudre par substitution $\begin{cases} -5x + y = 7 & (1) \\ 3x - 5y = 10 & (2) \end{cases}$



De « tête », on note que dans l'équation (1), le coefficient de y est 1 ... ce sera notre choix !!!

- A partir de (1):

$$-5x + y = 7$$

$$y = 7 + 5x \quad (3)$$

- En substituant (remplaçant) dans **l'autre** équation (2)

$$3x - 5y = 10$$

$$3x - 5(7 + 5x) = 10$$

$$3x - 35 - 25x = 10$$

$$-22x = 10 + 35$$

$$x = \frac{45}{-22} = -\frac{45}{22}$$

En DS, quand la calculatrice est autorisée, elle peut rendre de grands service ... **à condition de savoir s'en servir !**

- En reportant dans (3)

$$y = 7 + 5x = 7 + 5\left(-\frac{45}{22}\right) = 7 - \frac{225}{22} = \frac{154}{22} - \frac{225}{22} = -\frac{71}{22}$$

- Réciproque

$$\begin{cases} -5x + y = -5\left(-\frac{45}{22}\right) + \frac{-71}{22} = \frac{225}{22} - \frac{71}{22} = -\frac{154}{22} = -\frac{11 \times 2 \times 7}{2 \times 11} = 7 \\ 3x - 5y = 3\left(-\frac{45}{22}\right) - 5\left(-\frac{71}{22}\right) = -\frac{135}{22} + \frac{355}{22} = \frac{220}{22} = 10 \end{cases}$$

Donc $x = -\frac{45}{22}$ et $y = -\frac{71}{22}$ est la seule solution du système.

Piste rouge

Résoudre par substitution $\begin{cases} -6x + 2y = 7 & (1) \\ 4x - 5y = 10 & (2) \end{cases}$



Pas de coefficient valant 1 ou -1 ... rabattons-nous sur le 2 du y dans (1)

- A partir de (1):

$$-6x + 2y = 7$$

$$2y = 7 + 6x$$

$$y = \frac{7+6x}{2} \quad (3)$$

- En substituant (remplaçant) dans **l'autre** équation (2)

$$4x - 5y = 10$$

$$4x - 5\left(\frac{7+6x}{2}\right) = 10$$

$$4x - \frac{5(7+6x)}{2} = 10$$

$$\frac{8x-35-30x}{2} = \frac{20}{2}$$

 on multiplie par 2 qui est non nul

$$-22x - 35 = 20$$

$$-22x = 20 + 35$$

$$x = \frac{55}{-22} = -\frac{5 \times 11}{2 \times 11} = -\frac{5}{2}$$

- En reportant dans (3)

$$y = \frac{7+6x}{2} = \frac{7}{2} + \frac{6}{2}x = \frac{7}{2} + 3x = \frac{7}{2} + 3\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

- Réciproque

$$\begin{cases} -6x + 2y = -6\left(-\frac{5}{2}\right) + 2(-4) = 7 \\ 4x - 5y = 4\left(-\frac{5}{2}\right) - 5(-4) = 10 \end{cases}$$

Donc $x = -\frac{5}{2}$ et $y = -4$ est la seule solution du système.

En DS, quand la calculatrice est autorisée, elle peut rendre de grands services ... **à condition de savoir s'en servir !**