

Par cœur : Ecrire des inéquations équivalentes (des inéquations qui ont les mêmes solutions)

Lorsqu'on ajoute ou soustrait un même nombre à chaque membre d'une inéquation, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions.



Lorsqu'on multiplie ou divise chaque membre d'une inéquation, par un même nombre **positif non nul**, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions **en gardant le sens** de l'inégalité.

Lorsqu'on multiplie ou divise chaque membre d'une inéquation, par un même nombre **négatif non nul**, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions **en changeant le sens** de l'inégalité.

Ex 0 : Parmi les nombres -3 ; 10 et 5 quelles sont les solutions de l'inéquation $-3x + 2 \geq -x^2 + 12$?

Ex 1 : Résoudre, interpréter par des phrases, représenter graphiquement et donner l'ensemble des solutions:
 $8x - 4 \leq 6x + 3$ $4x + 7 > 9x + 1$ $7x + 3 \geq 11x - 1$ $-x < 0$

Ex 2 : Résoudre

1) $\sqrt{7}x - 2x < 3$

5) $(2x + 7)^2 = 16$

2) $3(x - 4) < 7x$

6) $\frac{8x - 1}{3} = \frac{x}{8}$

3) $\sqrt{7}x - 9x < 3$

7) $x^2 = 4$

4) $\frac{2x-7}{5} - x \leq \frac{6-x}{3}$

8) $-x + 4 > 4$

Ex 3 : Résoudre les inéquations

- $-4x + 7 > 2x + 3$
- $8x + 6 \geq 6x - 3$
- $x < \frac{x+3}{3}$
- $2x + 3 \leq 5(x + 3) + 5$

Ex 4 : Résoudre les équations

- $x^2 = 16$
- $(3x - 7)^2 = (4x + 1)^2$
- $(x + 3)^2 = (x + 3)(2x - 7)$
- $(x + 2)^2 = (x + 4)(x - 6)$

Ex 5 : Résoudre les inéquations

- $9x + 7 < 5x + 4$
- $4x - 2 \geq 7x + 6$
- $1 - \frac{x+5}{5} < \frac{x+3}{3}$

Ex 6 : Résoudre les inéquations $\sqrt{3}x + 1 < 4x - 4$ et $\sqrt{3}x + 1 < x - 4$

Pour se corriger

Ex 0 : Parmi les nombres -3 ; 10 et 5 quelles sont les solutions de l'inéquation $-3x + 2 \geq -x^2 + 12$?

1. Pour $x = -3$

- Dans le premier membre, $-3x + 2 = -3(-3) + 2 = -11$
 - Dans le second membre, $-x^2 + 12 = -(-3)^2 + 12 = -9 + 12 = 3$
- l'inégalité $-11 \geq 3$ est fausse
donc -3 n'est pas une solution

2. Pour $x = 10$

- Dans le premier membre, $-3x + 2 = -3(10) + 2 = -28$
 - Dans le second membre, $-x^2 + 12 = -(10)^2 + 12 = -100 + 12 = -88$
- l'inégalité $-28 \geq -88$ est vraie
donc -10 est une solution

3. Pour $x = 5$

- Dans le premier membre, $-3x + 2 = -3(5) + 2 = -13$
 - Dans le second membre, $-x^2 + 12 = -(5)^2 + 12 = -25 + 12 = -13$
- l'inégalité $-13 \geq -13$ est vraie
donc -13 est une solution

Ex 1 :

Résoudre $8x - 4 \leq 6x + 3$

En ajoutant $-6x + 4$ à chaque membre de l'inéquation, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions.

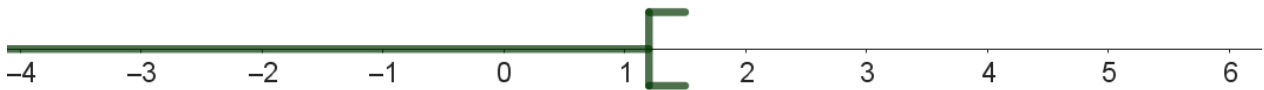
$$8x - 6x \leq 3 + 4$$

$$2x \leq 7$$

En divisant chaque membre de l'inéquation par le nombre **positif** non nul **2**, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions en **gardant** le sens de l'inégalité

$$x \leq \frac{7}{2}$$

Représentation graphique des solutions :



L'ensemble des solutions est : $] -\infty ; \frac{7}{2}]$

Interprétation :

- pour $x < \frac{7}{2}$ le résultat de la formule $8x - 4$ est plus **petit** que le résultat de la formule $6x + 3$
- pour $x = \frac{7}{2}$ le résultat de la formule $8x - 4$ est **égal** au résultat de la formule $6x + 3$
- pour $x > \frac{7}{2}$ le résultat de la formule $8x - 4$ est plus grand que le résultat de la formule $6x + 3$

Résoudre $4x + 7 > 9x + 1$

En ajoutant $-9x - 7$ à chaque membre de l'inéquation, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions.

$$4x - 9x > 1 - 7$$

$$-5x > -6$$

En divisant chaque membre de l'inéquation par le nombre **négatif** non nul -5 , on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions en **changeant** le sens de l'inégalité

$$x < \frac{-6}{-5}$$

$$x < \frac{6}{5}$$

Représentation graphique des solutions :



L'ensemble des solutions est : $[\frac{6}{5} ; +\infty[$

Interprétation :

- pour $x < \frac{6}{5}$ le résultat de la formule $4x + 7$ est plus **grand** que le résultat de la formule $9x + 1$
- pour $x = \frac{6}{5}$ le résultat de la formule $4x + 7$ est égal au résultat de la formule $9x + 1$
- pour $x > \frac{6}{5}$ le résultat de la formule $4x + 7$ est plus petit que le résultat de la formule $9x + 1$

Résoudre $7x + 3 \geq 11x - 1$

En ajoutant $-11x - 3$ à chaque membre de l'inéquation, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions.

$$7x - 11x \geq -1 - 3$$

$$-4x \geq -4$$

En divisant chaque membre de l'inéquation par le nombre **négalif** non nul -4 , on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions en **changeant** le sens de l'inégalité

$$x \leq \frac{-4}{-4}$$

$$x \leq 1$$

Représentation graphique des solutions :



L'ensemble des solutions est : $] -\infty ; \frac{-1}{2}]$

Interprétation :

- pour $x < \frac{-1}{2}$ le résultat de la formule $7x + 3$ est plus **grand** que le résultat de la formule $11x - 1$
- pour $x = \frac{-1}{2}$ le résultat de la formule $7x + 3$ est égal au résultat de la formule $11x - 1$
- pour $x > \frac{-1}{2}$ le résultat de la formule $7x + 3$ est plus petit que le résultat de la formule $11x - 1$

Résoudre $-x < 0$

Rappel : $-x$ est l'écriture abrégée de $-1 \times x$

$$-x < 0$$

En multipliant chaque membre de l'inéquation par le nombre **négalif** non nul -1 , on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions en **changeant** le sens de l'inégalité

$$x > 0 \times (-1)$$

$$x > 0$$

Représentation graphique des solutions :



L'ensemble des solutions est : $]0 ; +\infty[$

Interprétation :

- pour $x < 0$ $-x$ est strictement **positif**
- pour $x = 0$ $-x$ est nul
- pour $x > 0$ $-x$ est strictement **négatif**

Ex 2 :

1. Résoudre $\sqrt{7}x - 2x < 3$

$$\sqrt{7} \times x - 2 \times x < 3 \quad \text{en factorisant le facteur commun } x$$
$$(\sqrt{7} - 2) \times x < 3$$

On sait que $4 < 7 < 9$ en passant aux racines carrées, l'ordre est conservé

$$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{7} < 3 \quad \text{donc } \sqrt{7} \approx 2, \dots$$

donc $\sqrt{7} - 2 > 0$ (on fait *le plus grand - le plus petit*)

en divisant chaque membre de l'inéquation par $\sqrt{7} - 2$ qui est positif, on obtient une autre inéquation qui a exactement les mêmes solutions en gardant le sens de l'inégalité

$$x < \frac{3}{\sqrt{7}-2}$$

L'ensemble des solutions est $] -\infty ; \frac{3}{\sqrt{7}-2} [$

2. Résoudre $3(x - 4) < 7x$

$$3x - 12 < 7x$$

$$3x - 7x < 12$$

$$-4x < 12$$

$$x > \frac{12}{-4}$$

$$x > -3$$

L'ensemble des solutions est $[-3 ; +\infty[$



en divisant par -4
qui est **négatif** non nul

3. Résoudre $\sqrt{7}x - 9x < 3$

$$\sqrt{7} \times x - 9 \times x < 3 \quad \text{en factorisant le facteur commun } x$$

$$(\sqrt{7} - 9) \times x < 3$$

On sait que $4 < 7 < 9$ en passant aux racines carrées, l'ordre est conservé

$$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{7} < 3 \quad \text{donc } \sqrt{7} \approx 2, \dots$$

donc $\sqrt{7} - 9 < 0$ (on fait *le plus grand - le plus petit*)

en divisant chaque membre de l'inéquation par $\sqrt{7} - 9$ qui est **négatif**, on obtient une autre inéquation qui a exactement les mêmes solutions en **changeant** le sens de l'inégalité

$$x > \frac{3}{\sqrt{7}-9}$$

L'ensemble des solutions est $] \frac{3}{\sqrt{7}-9} ; +\infty[$

4. Résoudre $\frac{2x-7}{5} - x \leq \frac{6-x}{3}$

$$\frac{2x-7}{5} - x \leq \frac{6-x}{3}$$

$$\frac{3(2x-7)}{15} - \frac{15x}{15} \leq \frac{5(6-x)}{15}$$

$$3(2x-7) - 15x \leq 5(6-x)$$

$$6x - 21 - 15x \leq 30 - 5x$$

$$6x - 15x + 5x \leq 30 + 21$$

$$-4x \leq 51$$

$$x \geq \frac{51}{-4}$$

$$x \geq -\frac{51}{4}$$

L'ensemble des solutions est $[-\frac{51}{4} ; +\infty[$

en multipliant chaque membre par 15 qui est positif non nul

+21 + 5x

en divisant par -4 **négatif**

Interprétation (non demandée):

Pour $x > -\frac{51}{4}$ la formule $\frac{2x-7}{5} - x$ donne un résultat plus petit que celui de la formule $\frac{6-x}{3}$

Pour $x = -\frac{51}{4}$ la formule $\frac{2x-7}{5} - x$ donne le même résultat que celui de la formule $\frac{6-x}{3}$

Pour $x < -\frac{51}{4}$ la formule $\frac{2x-7}{5} - x$ donne un résultat plus grand que celui de la formule $\frac{6-x}{3}$

5. Résoudre $(2x+7)^2 = 16$

L'équation est du second degré, on pense au théorème du produit nul.

$$(2x+7)^2 = 16$$

$$(2x+7)^2 - 16 = 0$$

$$(2x+7)^2 - 4^2 = 0$$

on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

qui peut s'énoncer : « carré moins carré est égal à la somme fois la différence »

$$((2x+7)+4)((2x+7)-4) = 0$$

$$(2x+11)(2x+3) = 0$$

d'après le théorème du produit nul

$$2x+11=0 \text{ ou } 2x+3=0$$

$$x = -\frac{11}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

L'ensemble des solutions est $\{-\frac{11}{2} ; -\frac{3}{2}\}$

6. Résoudre $\frac{8x-1}{3} = \frac{x}{8}$

$$\frac{8x-1}{3} = \frac{x}{8}$$

$$\frac{8(8x-1)}{24} = \frac{3x}{24}$$

$$8(8x-1) = 3x$$

$$64x - 8 = 3x$$

$$64x - 3x = 8$$

$$61x = 8$$

en multipliant chaque membre par 24 qui est non nul

-3x + 8

en divisant par 61 (non nul). C'est une équation, peu importe le signe !

$$x = \frac{8}{61}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{8}{61} \right\}$

Interprétation (non demandée):

Les formules $\frac{8x-1}{3}$ et $\frac{x}{8}$ ne donnent jamais le même résultat sauf pour x valant $\frac{8}{61}$

7. Résoudre $x^2 = 4$

$\sqrt{4}$ est le nombre positif dont le carré est 4. L'autre nombre dont le carré est 4 est : $-\sqrt{4}$
Comme $\sqrt{4} = 2$, l'ensemble des solution est $\{-2 ; 2\}$

Autre rédaction :

L'équation est du second degré, on pense au théorème du produit nul.

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 - 2^2 &= 0 \end{aligned}$$


on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
qui peut s'énoncer : « carré moins carré est égal à la somme fois la différence »
 $(x + 2)(x - 2) = 0$

d'après le théorème du produit nul

$$x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

L'ensemble des solutions est $\{-2 ; 2\}$

8. Résoudre $-x + 4 > 4$

$$\begin{aligned} -x + 4 &> 4 \\ -x &> 4 - 4 \\ -1x &> 0 \\ x &< \frac{0}{-1} \\ x &< 0 \end{aligned}$$


L'ensemble des solutions est : $] -\infty ; 0 [$

Ex 3 :

Résoudre $-4x + 7 > 2x + 3$

$$\begin{aligned} -4x + 7 &> 2x + 3 && \Leftrightarrow && -4x - 2x > 3 - 7 \\ &&& \Leftrightarrow && -6x > -4 \\ &&& \Leftrightarrow && x < -\frac{4}{-6} \\ &&& \Leftrightarrow && x < \frac{2}{3} \end{aligned}$$


L'ensemble des solutions est $] -\infty ; \frac{2}{3} [$

Résoudre $8x + 6 \geq 6x - 3$

$$8x + 6 \geq 6x - 3 \Leftrightarrow 8x - 6x \geq -3 - 6$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -9$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{2}$$



en divisant chaque membre par 2 qui est positif non nul

L'ensemble des solutions est $[-\frac{9}{2}; +\infty[$

Résoudre $x < \frac{x+3}{3}$

$$x < \frac{x+3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} < \frac{x+3}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x < x + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x - x < 3$$

$$\Leftrightarrow 2x < 3$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$



en multipliant chaque membre par 3 qui est positif non nul



en divisant chaque membre par 2 qui est positif non nul

L'ensemble des solutions est $] -\infty; \frac{3}{2} [$

Résoudre $2x + 3 \leq 5(x + 3) + 5$

$$2x + 3 \leq 5(x + 3) + 5 \Leftrightarrow 2x + 3 \leq 5x + 15 + 5$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5x \leq 20 - 3$$

$$\Leftrightarrow -3x \leq 17$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{17}{-3}$$

en divisant chaque membre par -3 qui est négatif

L'ensemble des solutions est $[-\frac{17}{3}; +\infty[$

Ex 4 :

Résoudre $x^2 = 16$

$$x^2 - 4^2 = 0$$

on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

qui peut s'énoncer : « carré moins carré est égal à la somme fois la différence »

$$(x + 4)(x - 4) = 0$$

d'après le théorème du produit nul

$$x + 4 = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$

$$x = -4 \text{ ou } x = 4$$

L'ensemble des solutions est $\{-4; 4\}$

Résoudre $(3x - 7)^2 = (4x + 1)^2$

$$(3x - 7)^2 - (4x + 1)^2 = 0$$

on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

qui peut s'énoncer : « carré moins carré est égal à la somme fois la différence »

$$((3x - 7) + (4x + 1))((3x - 7) - (4x + 1)) = 0$$

$$(7x - 6)(-x - 8) = 0$$

d'après le théorème du produit nul

$$7x - 6 = 0 \text{ ou } -x - 8 = 0$$

$$x = \frac{6}{7} \text{ ou } x = -8$$

L'ensemble des solutions est $\{\frac{6}{7}; -8\}$

Résoudre $(x + 3)^2 = (x + 3)(2x - 7)$

$$(x + 3) \times (x + 3) - (x + 3) \times (2x - 7) = 0$$

en mettant $x + 3$ en facteur commun

$$(x + 3) \times ((x + 3) - (2x - 7)) = 0$$

$$(x + 3) \times (x + 3 - 2x + 7) = 0$$

d'après le théorème du produit nul

$$(x + 3)(-x + 10) = 0$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad -x + 10 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 10$$

L'ensemble des solutions est $\{-3 ; 10\}$

Résoudre $(x + 2)^2 = (x + 4)(x - 6)$

En fait, cette équation est du premier degré car le x^2 se simplifient en développant

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 6x + 4x - 24$$

$$x^2 + 4x - x^2 + 6x - 4x = -24 - 4$$

$$6x = -28$$

$$x = -\frac{28}{6}$$

$$x = -\frac{14}{3}$$

L'ensemble des solutions est $\{-\frac{14}{3}\}$

Ex 5 : Résoudre des inéquations

$$9x + 7 < 5x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 9x - 5x < 4 - 7$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x < -3$$

$$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{3}{4}$$

en divisant chaque membre par 4 qui est positif

L'ensemble des solutions est $] -\infty ; -\frac{3}{4} [$

$$4x - 2 \geq 7x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 7x \geq 6 + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x \geq 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{8}{-3}$$

en divisant chaque membre par -3 qui est négatif

L'ensemble des solutions est $] -\infty ; -\frac{8}{3}]$

$$1 - \frac{x+5}{5} < \frac{x+3}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{15-3(x+5)}{15} < \frac{5(x+3)}{15}$$

$$\Leftrightarrow \quad 15 - 3x - 15 < 5x + 15$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x - 5x < 15$$

$$\Leftrightarrow \quad -8x < 15$$

$$\Leftrightarrow \quad x > \frac{15}{-8}$$

en multipliant chaque membre par 15 (positif)

en divisant chaque membre par -8 (négatif)

L'ensemble des solutions est $] -\frac{15}{8} ; +\infty [$

Ex 6 : Résoudre les inéquations

Remarque : $1^2 < 3 < 2^2$ donc $1 < \sqrt{3} < 2$ donc $\sqrt{3} \approx 1, \dots$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x + 1 < 4x - 4 &\Leftrightarrow \sqrt{3}x - 4x < -4 - 1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 4)x < -5 && \text{en divisant chaque membre par } \sqrt{3} - 4 \text{ qui est négatif} \\ &\Leftrightarrow x > \frac{-5}{\sqrt{3}-4}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $] \frac{-5}{\sqrt{3}-4} ; +\infty [$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x + 1 < x - 4 &\Leftrightarrow \sqrt{3}x - x < -4 - 1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)x < -5 && \text{en divisant chaque membre par } \sqrt{3} - 1 \text{ qui est positif} \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-5}{\sqrt{3}-1}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $] -\infty ; \frac{-5}{\sqrt{3}-1} [$