

Chapitre 7 : Equations de droites

Ce cours est à lire à plusieurs niveaux :

-  Piste verte pour tout le monde
-  Piste rouge ... pour ceux qui prennent la spécialité « *mathématiques* » et qui ne sont pas en difficultés
-  Piste noire ... pour ceux qui prennent *spécialité mathématiques* et qui vise « haut »

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Conformément au programme, le repère sera orthonormé mais les résultats présentés restent vrais sans cette condition.

I. Vecteurs directeurs d'une droite

 **Définition** Soit A et B deux points distincts.

On appelle **vecteur directeur** de la droite (AB) , tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

 **Ex 1 :** On considère $A(9; 11)$ et $B(-2; 15)$. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (AB)

Correction : Bien entendu, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur nul car $A \neq B$. De plus, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$!

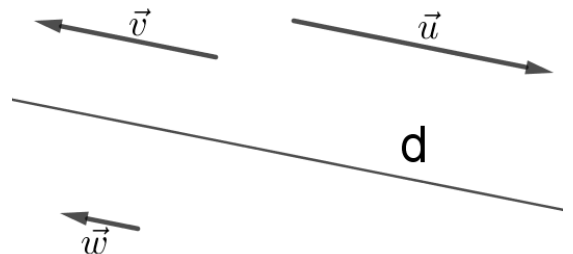
$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 9 \\ 15 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un de la forme *nombre non nul* $\times \overrightarrow{AB}$

$2 \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $-3 \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 33 \\ -12 \end{pmatrix}$ sont aussi des vecteurs directeurs de la droite (AB) .

 **Interprétation géométrique**

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs directeurs de d : ils donnent la direction de d



 **Propriété :** Soit d une droite dont un des vecteurs directeurs est $\vec{u}$
Soit d' une droite dont un des vecteurs directeurs est $\vec{v}$

- 1) Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- 2) Les droites d et d' sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires



II. Equations cartésienne de droites

 **Equation de droites ?**

Une équation de droite est une égalité liant l'abscisse et l'ordonnée d'un point M **caractérisant** le fait que M appartienne à la droite :

Un point est sur la droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite

Par exemple, dire que la droite d a pour équation $y = 3x + 7$ veut dire que

- d est l'ensemble des points dont l'ordonnée est la somme du triple de l'abscisse et de 7
- Un point $M(x; y)$ est sur d si et seulement si $(x; y)$ est une solution de l'équation $y = 3x + 7$

Théorème : Toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ appelée **équation cartésienne** de d
Le vecteur $\vec{u}(-b ; a)$ est un des vecteurs directeurs de d



Ex 2 : Savoir déterminer une équation cartésienne de d connaissant les coordonnées de deux points

- 1) Trouver une équation cartésienne de la droite (AB) sachant que $A(-2 ; 5)$ et $B(3 ; 7)$
- 2) Donner deux autres équations cartésiennes de (AB)

Solution :

$$\begin{aligned}
 1) \quad M(x ; y) \in (d) &\Leftrightarrow \text{les points } A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\
 &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(x+2) - 5(y-5) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 29 = 0 \\
 \text{Donc } (AB): &2x - 5y + 29 = 0
 \end{aligned}$$

- 2) En divisant chaque membre par -1 , on obtient une autre équation $(AB) : -2x + 5y - 29 = 0$
En multipliant chaque membre par $\sqrt{2}$, on obtient $(AB) : 2\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y + 29\sqrt{2} = 0$

Savoir trouver une équation de droite connaissant un point et un vecteur directeur

d la droite passant par $A(-2 ; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 M(x ; y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\
 &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(x+2) - 5(y-5) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x - 5y + 29 = 0
 \end{aligned}$$

$$(AB): 2x - 5y + 29 = 0$$

Preuve du théorème en généralisant le cas particulier

Soit d la droite passant par $A(x_A ; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha ; \beta)$

$$\begin{aligned}
 M(x ; y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\
 &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \beta(x-x_A) - \alpha(y-y_A) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0
 \end{aligned}$$

$$d: \beta x - \alpha y + \alpha y_A - \beta x_A = 0$$

L'équation est bien de la forme $ax + by + c = 0$ en posant $a = \beta$ $b = -\alpha$ (et donc $\alpha = -b$) $c = \alpha y_A - \beta x_A$

Un vecteur directeur est bien $\vec{u}(-b ; a)$

On voit que : a, b, c sont 3 nombres indépendants de x et y avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$

Remarque : $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ veut dire que a et b ne sont pas tous les nuls.



Théorème réciproque:

Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est l'équation d'une droite.



Preuve : Soit a, b, c trois réels avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.

Soit C l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que : $ax + by + c = 0$

C n'est pas vide. En effet :

- si $a \neq 0$, le point de coordonnées $\left(-\frac{c}{a} ; 0\right)$ est dans C car $a\left(-\frac{c}{a}\right) + b \times 0 + c = -c + 0 + c = 0$
- si $b \neq 0$, le point de coordonnées $\left(0 ; -\frac{c}{b}\right)$ est dans C car $a \times 0 + b \times \left(-\frac{c}{b}\right) + c = 0 - c + c = 0$
- le cas $a = b = 0$ ne peut pas se produire car $(a ; b) \neq (0 ; 0)$

Soit $A(x_A; y_A)$ un des points de C donc $ax_A + by_A + c = 0$

puisque $ax_A + by_A + c$ et 0 sont égaux, on peut substituer l'un à l'autre

$M(x; y) \in C \Leftrightarrow ax + by + c = 0$
 $\Leftrightarrow ax + by + c = ax_A + by_A + c$
 $\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
 $\Leftrightarrow$ le déterminant de $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ vaut 0
 $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
 $\Leftrightarrow M$ est sur la droite passant par A et vecteur directeur $\vec{u}$
 Donc C est la droite passant par A et vecteur directeur $\vec{u}$

Ex 3 : Savoir déterminer des points d'une droite

Soit $d: 2x + y + 11 = 0$ Ce qui se lit « soit d la droite dont une équation cartésienne est : $2x + y + 11 = 0$ ».
Donner deux points de d .

Solution : pour $x = -7$ (valeur choisit arbitrairement) $2(-7) + y + 11 = 0$ donc $y = 3$
 pour $y = 5$ (on peut aussi fixer une valeur de y) $2x + 5 + 11 = 0$ donc $x = -8$
 Les points de coordonnées $(-7; 3)$ et $(-8; 5)$ sont sur d

Ex 4 : Savoir tester si un point est sur une droite

Le point $B(\sqrt{2}; 4)$ est-il sur la droite d d'équation $-\sqrt{2}x - y + 6 = 0$

Solution : on remplace x et y respectivement par $\sqrt{2}$ et 4. On regarde si le résultat donne 0.
 $-\sqrt{2}x - y + 6 = -\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 4 + 6 = -2 - 4 + 6 = 0$
 Comme les coordonnées de B vérifient l'équation, B est sur d . Ce qui peut s'écrire : $B \in d$

Ex 5 : Savoir trouver un vecteur directeur connaissant une équation

Soit $d: -9x + 5y - 7 = 0$ et $d': y = -6x + 4$. Donner un vecteur directeur de chacune de ces droites.

Correction : $-9x + 5y - 7 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -9$ $b = 5$ $c = -7$
 Un des vecteurs directeurs de d est : $\vec{u}(-b; a) = (-5; -9)$

$y = -6x + 4 \Leftrightarrow -6x - y + 4 = 0$ donc une autre équation de d' est : $-6x - y + 4 = 0$
 On reconnaît la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -6$ $b = -1$ $c = 4$
 Un des vecteurs directeurs de d' est : $\vec{v}(-b; a) = (1; -6)$

III. Equations réduites de droites

Théorème : équations réduites de droite

Toute droite d , non parallèle à l'axe des ordonnées, admet une *équation* de la forme $y = mx + p$

-  m s'appelle le **coefficient directeur** (ou **pente**) de la droite. De plus, $m = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variation des abscisses}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ où A et B sont deux points distinct de d (m est indépendant du choix de A et B)
- la droite est la représentation graphique d'une fonction affine
- Comme pour $x = 0$ on a : $y = m \times 0 + p = p$, le nombre p est parfois appelé *ordonnée à l'origine*

Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = p$

- La droite n'est pas la représentation graphique d'une fonction (sinon le nombre p aurait plusieurs images)
- Tous les points de la droite ont la même abscisse
- Le coefficient directeur n'existe pas (dans la formule précédente, comme $x_B = x_A$, il y aurait une division par 0)

Réciproquement, toute équation de la forme $x = p$ ou de la forme $y = mx + p$ est l'équation d'une droite.

Preuve Soit d une droite. D'après le paragraphe précédent, d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$

- Cas $b = 0$ Comme a et b ne sont pas tous les deux nuls, $a \neq 0$

$$ax + 0y + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$$

on a bien une équation de la forme $x = \text{nombre}$ (on peut appeler ce nombre p)

Tous les points de d ont la même abscisse donc d est parallèle à l'axe des ordonnées

- Cas $b \neq 0$ $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

on a bien une équation de la forme $y = mx + p$ en posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$

Prenons $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts de d donc $\begin{cases} ax_B + by_B + c = 0 \\ ax_A + by_A + c = 0 \end{cases}$

En soustrayant membre à membre, $ax_B + by_B + c - ax_A - by_A - c = 0$

Donc $a(x_A - x_B) + b(y_B - y_A) = 0$ donc $-\frac{a}{b} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et comme $m = -\frac{a}{b}$ on a : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

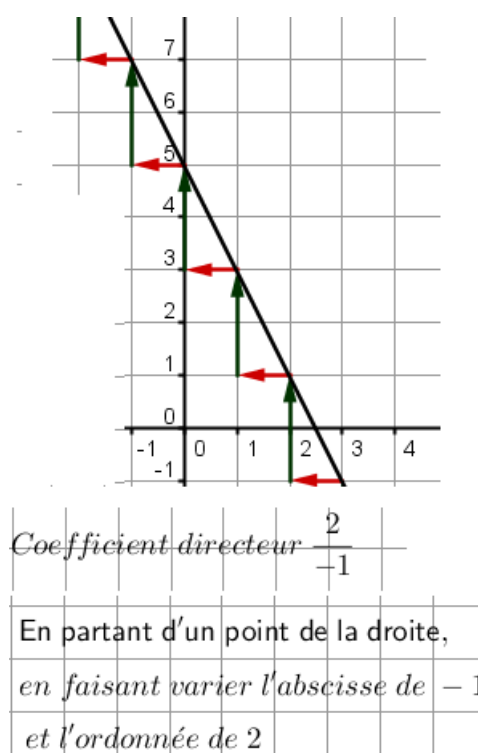
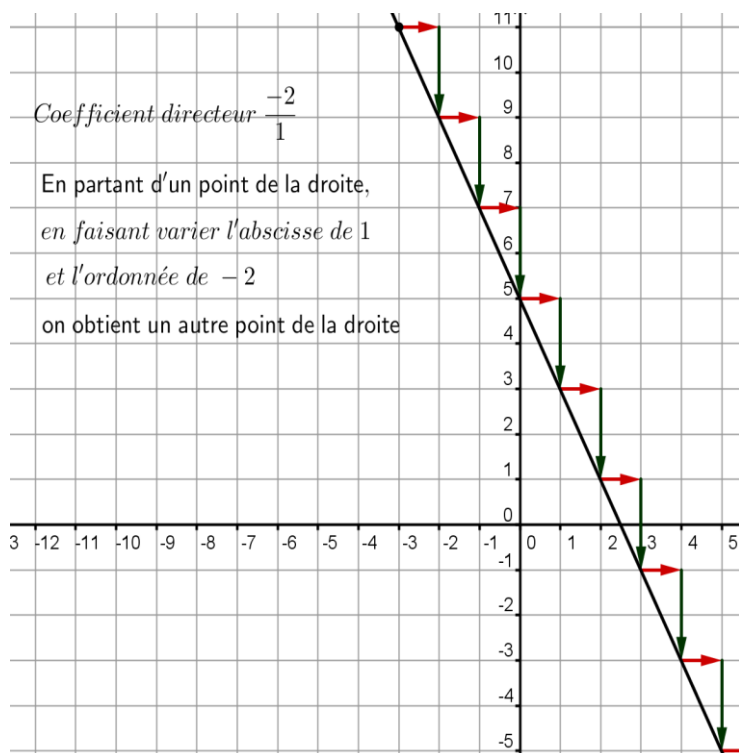
Interprétation graphique de la pente (on dit aussi coefficient directeur)

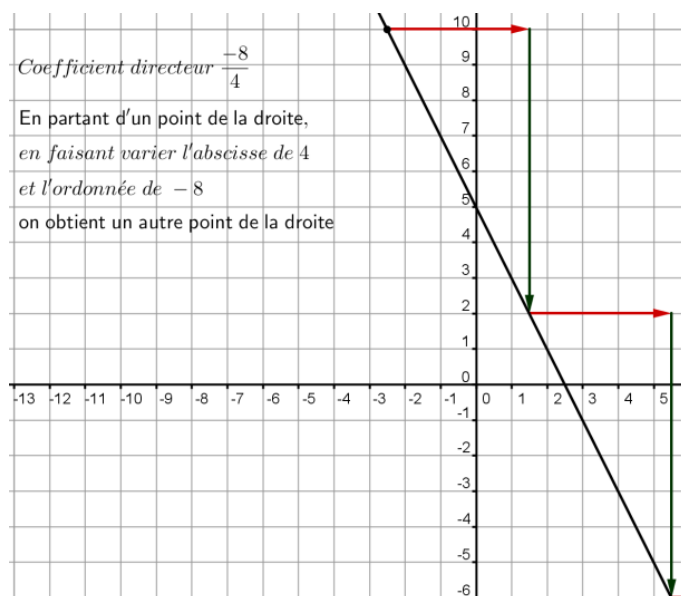
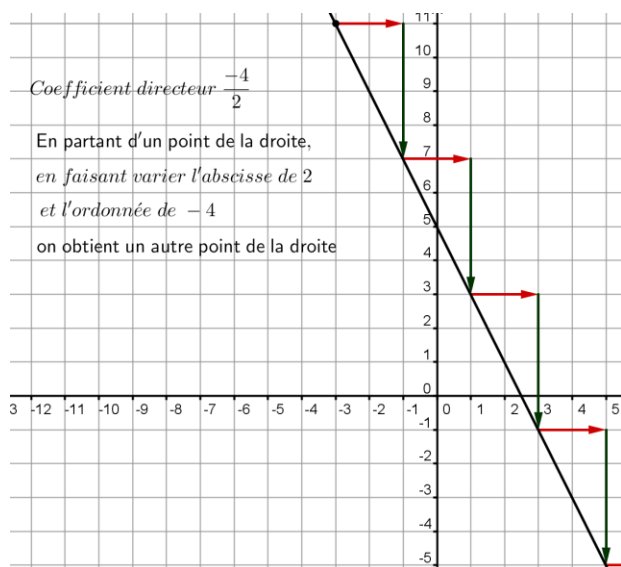
Considérons la droite d'équation $y = -2x + 5$. Le coefficient directeur est $m = -2$

$$m = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variation des abscisses}} = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{-8}{4} = \dots$$

Plusieurs interprétations sont possibles. Par exemple, en partant d'un point de la droite, en faisant varier l'abscisse de +1 et l'ordonnée de -2, on obtient un autre point de la droite.

En termes plus mathématiques, si un point est sur la droite, son image par la translation de vecteur $\vec{u}(1 ; -2)$ est aussi sur la droite.





Théorème : parallélisme et coefficient directeur

d et d' étant deux non parallèles à l'axe des ordonnées (donc le coefficient directeur existe)

d et d' sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur

Preuve Soit $d: y = mx + p$ et $d': y = m'x + p'$

$y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$ un vecteur directeur de d est : $\vec{u}(-b; a) = (1; m)$

$y = m'x + p' \Leftrightarrow m'x - y + p' = 0$ un vecteur directeur de d' est : $\vec{v}(-b; a) = (1; m')$

$d // d'$ si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ si et seulement si $1 \times m' - 1 \times m = 0$ si et seulement si $m' = m$

Ex 6 : Savoir déterminer l'équation réduite d'une droite

Soit $A(-2; 5)$ et $B(3; 7)$. Déterminer l'équation réduite de (AB) .

Correction :

Première rédaction : Comme $x_A \neq x_B$, $(AB): y = mx + p$

$$m = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variation des abscisses}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Donc } (AB): y = \frac{2}{5}x + p$$

$$\begin{array}{ccc} A(-2; 5) & & \\ x_B - x_A = 5 & \downarrow & y_B - y_A = 2 \\ B(3; 7) & & \end{array}$$

$$\text{Comme } A(-2; 5) \text{ est sur } (AB): \frac{2}{5} \times (-2) + p = 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{5} + p = 5 \Leftrightarrow p = \frac{29}{5}$$

$$\text{L' équation réduite de } (AB) \text{ est } y = \frac{2}{5}x + \frac{29}{5}$$

Seconde rédaction : $M(x; y) \in (AB)$ SSI $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - (-2) \\ y - 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\text{SSI } 2(x + 2) - 5(y - 5) = 0$$

$$\text{SSI } 2x - 5y + 29 = 0$$

$$\text{SSI } -5y = -2x - 29$$

$$\text{SSI } y = \frac{-2x - 29}{-5} = \frac{2}{5}x + \frac{29}{5}$$

$$\text{L' équation réduite de } (AB) \text{ est } y = \frac{2}{5}x + \frac{29}{5}$$

Remarque : $2x - 5y + 29 = 0$ est une des équations cartésiennes de (AB)

Ex 7 : Savoir tracer une droite

- Savoir tracer une droite connaissant son équation
- Savoir tracer une droite connaissant un point et le coefficient directeur

- 1) Représenter graphiquement les droites : $d_1 : x = 5$ $d_2 : y = -1$ $d_3 : y = \frac{1}{2}x + 4$
- 2) Expliquer comment tracer la droite D passant par $A(-6 ; 7)$ et de coefficient directeur $-0,4$. La tracer

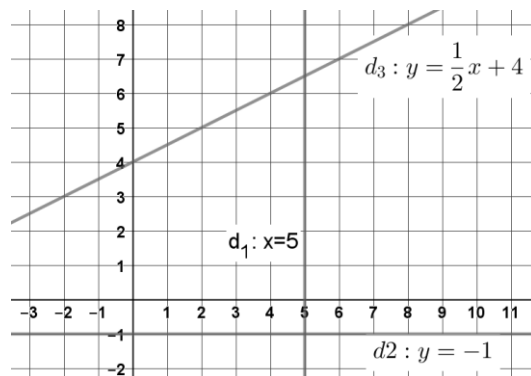
Correction

- 1) Pour tracer une droite, il suffit de trouver deux points à l'aide de l'équation.

d_1 passe par les points de coordonnées $(5 ; 1)$ et $(5 ; 7)$

d_2 passe par les points de coordonnées $(-3 ; -1)$ et $(2 ; -1)$

d_3 passe par les points de coordonnées $(0 ; 4)$ et $(4 ; 6)$

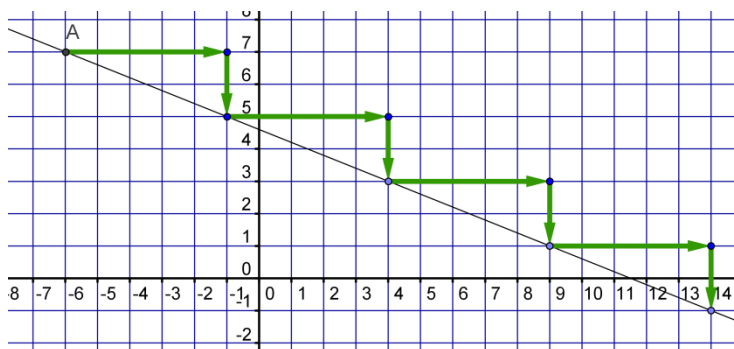


- 2)

$$-0,4 = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5} = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variation des abscisses}}$$

On place le point A et on construit son image par la translation de vecteur $\vec{u}(5 ; -2)$

Dit autrement, en partant de tout point de la droite, et en appliquant une variation de $+5$ sur les abscisses et une variation de -2 sur les ordonnées, on obtient un autre point de la droite.

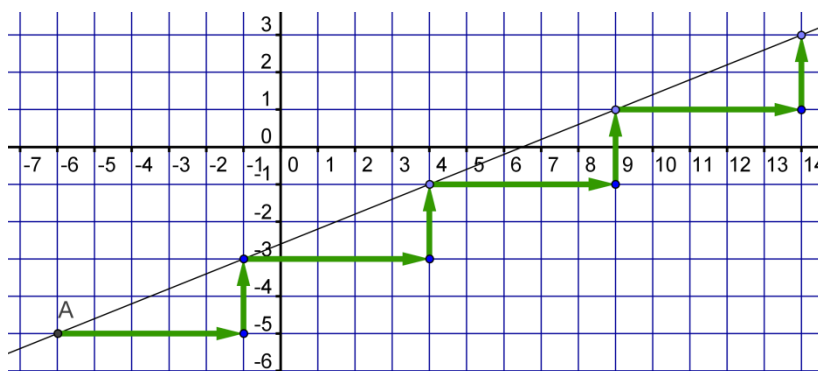


- 3)

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variation des abscisses}}$$

On place le point A et on construit son image par la translation de vecteur $\vec{u}(5 ; 2)$

Dit autrement, en partant de tout point de la droite, et en appliquant une variation de $+5$ sur les abscisses et une variation de $+2$ sur les ordonnées, on obtient un autre point de la droite.



Ex 8 : Savoir reconnaître une équation de droite

On considère les 8 ensembles de points, définis ci-dessous, lesquels sont des droites ?

$$E_1 : y = x^2 + 7$$

$$E_2 : 3x + 2y = 4$$

$$E_3 : x = 9$$

$$E_4 : y = 2x$$

$$E_5 : y = \frac{3x+1}{7}$$

$$E_6 : y = \frac{2}{x} + 1$$

$$E_7 : y = 5$$

$$E_8 : 2x - 3y + 4 = 0$$

Correction

E_1 n'est pas une droite à cause de x^2

$$3x + 2y = 4 \Leftrightarrow 3x + 2y - 4 = 0$$

On reconnaît la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 3$; $b = 2$; $c = -4$ donc E_2 est une droite

$$E_3: x = 9 \quad \text{On reconnaît la forme } x = p$$

Donc E_3 est une droite parallèle à l'axe des ordonnées. La pente n'existe pas.

$$E_4: y = 2x \quad \text{On reconnaît la forme } y = mx + p \text{ avec } m = 2 \text{ et } p = 0$$

Donc E_4 est une droite de pente (coefficient directeur) 2

$$E_5: y = \frac{3x+1}{7} = \frac{3}{7}x + \frac{1}{7} \quad \text{On reconnaît la forme } y = mx + p \text{ avec } m = \frac{3}{7} \text{ et } p = \frac{1}{7}$$

E_5 est une droite de coefficient directeur (pente) $\frac{3}{7}$

$$E_6 \text{ n'est pas une droite à cause de } \frac{2}{x}.$$

$$y = 5 \quad \text{On reconnaît la forme } y = mx + p \text{ avec } m = 0 \text{ et } p = 5$$

Donc E_7 est une droite de pente 0

$$E_8: 2x - 3y + 4 = 0$$

On reconnaît la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 2$; $b = -3$; $c = 4$ donc E_8 est une droite

IV. Droites parallèles

Ex 9 : Savoir donner un des vecteurs directeurs d'une droite et la pente (si elle existe)



$$d_1: -3x + 12y - 5 = 0$$

$$d_2: x - 6 = 0$$

$$d_3: y = \frac{1}{4}x + 7$$

$$d_4: x = 2$$

$$d_5: y = 6$$

$$d_6: 3y - 2 = 0$$

$$d_7 \text{ est une parallèle à } d_8: 9x - 4y - 8 = 0$$

d_9 est une droite de coefficient directeur -3

Corrigé :

- $-3x + 12y - 5 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -3$; $b = 12$; $c = -5$

Un des vecteurs directeurs de d_1 est $\vec{u}(-b ; a) = (-12 ; -3)$

$$\text{La pente est : } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variation des abscisses}} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4}$$

Autre méthode pour la pente

$$-3x + 12y - 5 = 0 \Leftrightarrow 12y = 3x + 5 \Leftrightarrow y = \frac{3x+5}{12} = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12} \quad d_1 \text{ a pour pente } \frac{1}{4}$$

- $x - 6 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 1$; $b = 0$; $c = -6$

Un des vecteurs directeurs de d_2 est $\vec{u}(-b ; a) = (0 ; -1)$

$x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ La droite d_2 n'a pas de pente, elle est parallèle à l'axe des ordonnées.

- $y = \frac{1}{4}x + 7 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + y - 7 = 0$ forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -\frac{1}{4}$; $b = 1$; $c = -7$

Un vecteur directeur de d_3 est $\vec{u}(-b; a) = \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$. Remarque : $\vec{v}\left(1; \frac{1}{4}\right)$ convient aussi

$$d_3: y = \frac{1}{4}x + 7 \quad d_3 \text{ a pour pente } \frac{1}{4}$$

- $x = 2$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées donc un vecteur directeur est $\vec{j}$ (du repère)
Autre méthode : $x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 1; b = 0; c = 2$
Un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a) = (0; 1)$ on reconnaît les coordonnées de $\vec{j}$

$$d_4: x = 2 \quad \text{La droite } d_4 \text{ n'a pas de pente, elle est parallèle à l'axe des ordonnées.}$$

- $y = 6$ tous les points de d_5 ont la même ordonnée donc d_5 est parallèle à l'axe des abscisses donc un vecteur directeur est $\vec{i}$ (du repère)
Autre méthode : $y = 6 \Leftrightarrow y - 6 = 0$ de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 0; b = 1; c = -6$
Un vecteur directeur est $\vec{u}(-b; a) = (-1; 0)$ on reconnaît les coordonnées de $-\vec{i}$

$$d_5: y = 0x + 6 \quad \text{La droite } d_5 \text{ a pour pente 0. Elle est parallèle à l'axe des abscisses.}$$

- $3y - 2 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 0; b = 3; c = -2$
Un des vecteurs directeurs de d_6 est $\vec{u}(-b; a) = (-3; 0)$

$$\text{Autre méthode : } 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$$

d_6 est parallèle à l'axe des abscisses donc un vecteur directeur est $\vec{i}$. On a : $\vec{i} = -\frac{1}{3}\vec{u}$

$$d_6: y = \frac{2}{3} \quad \text{La droite } d_6 \text{ a pour pente 0. Elle est parallèle à l'axe des abscisses.}$$

- $9x - 4y - 8 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 9; b = -4; c = -8$
Donc un des vecteurs directeurs de d_8 est : $\vec{u}\left(\frac{-b}{a}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)$

Comme d_7 est parallèle à d_8 , $\vec{u}\left(\frac{4}{9}\right)$ est aussi un vecteur directeur de d_7

Soit A un point de d_7 . Soit B le point tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On rappelle que : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Donc $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9}{4}$. La pente de d_7 est $\frac{9}{4}$

- Pour tous les points A et B distincts, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \dots$

Un des vecteurs directeurs de d_9 est : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\left(\frac{2}{-6}\right)$ est aussi vecteur directeur

Ex 10 : Pour comprendre



- 1) Donner des équations de trois droites passant parallèles à $d : 7x - 4y + 11 = 0$
- 2) Donner des équations de trois droites passant parallèles à l'axe des abscisses
- 3) Donner des équations de trois droites passant parallèles à l'axe des ordonnées
- 4) Donner des équations de trois droites passant par $A(0; 9)$
- 5) Soit $A(-7; 3)$. Donner une équation de d , la parallèle à l'axe des ordonnées passant par A
- 6) Soit $A(-7; 3)$. Donner une équation de d , la parallèle à l'axe des abscisses passant par A

Correction

- 1) $d_1: 7x - 4y + 1 = 0$ $d_2: 7x - 4y - 7 = 0$ $d_3: 7x - 4y + 3 = 0$
Les équations de droites ci-dessus sont toutes sur le modèle : $d_4: 7x - 4y + \dots = 0$
En multipliant chaque membre de $7x - 4y + 11 = 0$ par 2, on obtient $d_1: 14x - 8y + 22 = 0$
 $d_5: 14x - 8y - 85 = 0$ $d_6: 14x - 8y + \dots = 0$ sont aussi des équations de parallèles à d
- 2) Tous les points d'une droite parallèle à l'axe des abscisses ont la même ordonnée
 $d_1: y = 85$ $d_2: y = \sqrt{2}$ $d_3: y = n'importe\ quel\ nombre$
- 3) Tous les points d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées ont la même abscisse
 $d_1: x = 85$ $d_2: x = \sqrt{2}$ $d_3: x = n'importe\ quel\ nombre$
- 4) $d_1: y = 2x + 9$ $d_2: y = \sqrt{2}x + 9$ $d_3: y = n'importe\ quel\ nombre \times x + 9$
- 5) Soit $A(-7 ; 3)$. Les points d'une parallèle à l'axe des ordonnées ont tous la même abscisse.
Comme A , qui est sur d , a pour abscisse -7 , une équation de d est $x = -7$
- 6) Soit $A(-7 ; 3)$. Les points d'une parallèle à l'axe des abscisses ont tous la même ordonnée.
Comme A , qui est sur d , a pour ordonnée 3 , une équation de d est $y = 3$

Ex 11 : Savoir déterminer une équation de droite



- Savoir déterminer une équation de droite connaissant un point et la pente
 - Savoir déterminer une équation de droite connaissant un point et une équation réduite d'une parallèle
 - Savoir déterminer une équation de droite connaissant les coordonnées de deux points
 - Savoir déterminer une équation de droite avec un point et une équation cartésienne d'une droite parallèle
- 1) Donner une équation réduite de la droite d passant par $A(5 ; 3)$ et de pente $-\frac{5}{7}$
- 2) Soit D la droite d'équation : $y = -2x + 5$
Déterminer, en justifiant, une équation réduite de la droite D' parallèle à D et passant par le point $A(3 ; 0)$
- 3) Déterminer une équation réduite de la droite (AB) sachant que $A(6 ; -5)$ $B(-3 ; 2)$
- 4) $A(2 ; 4)$ $B(2 ; 9)$ $D(1 ; 9)$ Donner une équation de (AB) et de (BD)
- 5) $B(2 ; 9)$ $C(-3 ; 13)$ Donner une équation cartésienne de (BC)
- 6) Déterminer une équation cartésienne de d' la parallèle à la droite $d: -x + y + 4 = 0$ passant par $A(-6 ; 5)$

Correction

Conseil : bien lire l'énoncé pour savoir s'il faut donner une équation réduite ou cartésienne ou si la forme de la réponse est libre (non précisée)

- 1) Le coefficient directeur de d est $m = -\frac{5}{7}$ Donc $d: y = -\frac{5}{7}x + p$
Comme A est sur d , ses coordonnées vérifient l'équation : $-\frac{5}{7} \times 5 + p = 3$ donc $p = 3 + \frac{25}{7} = \frac{46}{7}$
Ainsi : $d: y = -\frac{5}{7}x + \frac{46}{7}$

2) Le coefficient directeur de D est : -2 .

Comme D' est parallèle à D , D' a -2 comme coefficient directeur.

Une équation D est donc de la forme : $y = -2x + p$

Comme le point $A(3; 0)$ est sur D' , ses coordonnées vérifient l'équation. Pour $x = 3$ et $y = 0$:

$$-2 \times 3 + p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 + p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 6$$

Donc D' : $y = -2x + 6$

3) Comme $x_A \neq x_B$, une équation de (AB) est de la forme $y = mx + p$

• Calcul de m $m = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variation des abscisses}} = \frac{2 - (-5)}{-3 - 6} = -\frac{7}{9}$ Donc (AB) : $y = -\frac{7}{9}x + p$

• Calcul de p Comme $A(6; -5)$ est sur (AB) , ses coordonnées vérifient l'équation.

Pour $x = 6$ et $y = -5$

$$-\frac{7}{9} \times 6 + p = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{14}{3} + p = -5 \quad \Leftrightarrow \quad p = -5 + \frac{14}{3} = -\frac{15}{3} + \frac{14}{3} = -\frac{1}{3}$$

L'équation réduite de (AB) est $y = -\frac{7}{9}x - \frac{1}{3}$

Autre méthode possible :

$$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & -9 \\ y+5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7(x-6) - (-9)(y+5) = 0 \Leftrightarrow 7x + 9y + 3 = 0$$

donc (AB) : $7x + 9y + 3 = 0$

4) Comme A et B ont la même abscisse 2, l'équation réduite de (AB) est : $x = 2$

Autre méthode $M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ y-4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 5(x-2) - 0(y-4) = 0 \Leftrightarrow 5x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Une équation cartésienne de (AB) est $5x - 10 = 0$. L'équation réduite est $x = 2$

Comme B et D ont la même ordonnée 9, l'équation réduite de (BD) est $y = 9$

Autre méthode $M(x; y) \in (BD) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ y-9 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 0(x-2) - (-1)(y-9) = 0 \Leftrightarrow y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = 9$$

Une équation cartésienne de (BD) est $y - 9 = 0$. L'équation réduite est $y = 9$

5) $M(x; y) \in (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -5 \\ y-9 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 4(x-2) - (-5)(y-9) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 + 5y - 45 = 0$$

donc (BC) : $4x + 5y - 53 = 0$

Autre méthode :

Comme B et C n'ont pas la même abscisse, l'équation réduite de (BC) est de la forme : $y = mx + p$

or $m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = -\frac{4}{5}$ donc (BC) : $y = -\frac{4}{5}x + p$

Comme le point B est sur la droite (BC) , ses coordonnées vérifient l'équation donc $9 = -\frac{4}{5} \times 2 + p$

donc $p = \frac{53}{5}$ Ainsi (BC) : $y = -\frac{4}{5}x + \frac{53}{5}$

Donc $\frac{4}{5}x + y - \frac{53}{5} = 0$ est une des équations cartésiennes de (BC)

- 6) $-x + y + 4 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -1$; $b = 1$; $c = 4$

donc un des vecteurs directeurs de d est : $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Comme d est parallèle à d' , $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d'

$M(x; y) \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+6 & -1 \\ y-5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -1(x+6) - (-1)(y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 6 + y - 5 = 0$$

$$d' : -x + y - 11 = 0$$

Ex 12 : Savoir tester si deux droites sont parallèles ou sécantes



Dans chacun des cas suivants, dire si les droites d_1 et d_2 sont sécantes ou parallèles

1) $d_1: 14x - 21y - 5 = 0$ et $d_2: -6x + 9y + 2 = 0$

2) $d_1: 4x + 5y - 5 = 0$ et $d_2: y = -\frac{4}{5}x + 3$

3) $d_1: 9x + 12y + 7 = 0$ et $d_2: 6x + 4y + 7 = 0$

4) d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -42 \\ 49 \end{pmatrix}$ et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -18 \\ 21 \end{pmatrix}$

5) d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et d_2 a pour pente $-0,75$

Correction

1) $14x - 21y - 5 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 14$ $b = -21$ $c = -5$

Un vecteur directeur de d_1 est : $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix}$

$-6x + 9y + 2 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = -6$ $b = 9$ $c = 2$

Un vecteur directeur de d_2 est : $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 21 & -9 \\ 14 & -6 \end{vmatrix} = 21(-6) - 14(-9) = -126 + 126 = 0$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

2) $4x + 5y - 5 = 0 \Leftrightarrow 5y = -4x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + 1$

La pente de d_1 est $-\frac{4}{5}$ et la pente de d_2 est aussi $-\frac{4}{5}$

Comme les deux droites ont les mêmes pentes, elles sont parallèles.

Autre méthode : $y = -\frac{4}{5}x + 3 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x + y - 3 = 0$ un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

un vecteur directeur de d_1 est $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = -1(4) - \frac{4}{5} \times (-5) = -4 + 4 = 0$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc d_1 et d_2 sont parallèles.

3) un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u} \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d_2 est $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = -12 \times 6 - 9 \times (-4) = -36$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 sont sécantes.

Autre méthode :

$$9x + 12y + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{9}{12}x - \frac{7}{9} \quad \text{la pente de } d_1 \text{ est : } m_1 = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$$

$$6x + 4y + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{6}{4}x - \frac{7}{6} \quad \text{la pente de } d_2 \text{ est : } m_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Comme les deux droites n'ont pas les mêmes pentes, elles sont sécantes

$$4) \det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 21 & -9 \\ 14 & -6 \end{vmatrix} = 21(-6) - 14(-9) = -126 + 126 = 0$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles

$$5) \text{ La pente de } d_2: m_2 = -0,75 = \frac{-3}{4} = \frac{\text{Variation des ordonnées}}{\text{Variation des abscisses}}$$

Donc $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un des vecteurs directeurs de d_2

Comme $\vec{v} = -1 \vec{u}$, les vecteurs directeurs de d_1 et d_2 sont colinéaires

donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

$$\text{Autre méthode : } \vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{variation des abscisses} \\ \text{variation des ordonnées} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc la pente de } d_1 \text{ est : } m_1 = \frac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}} = \frac{3}{-4} = -0,75$$

Comme les deux droites ont les mêmes pentes, elles sont parallèles.