

Modéliser en probabilités

I. Modélisation en définissant un modèle théorique à priori

Savoir-faire 1 On dispose d'un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4. On le lance et on note le numéro sorti.
Proposer une loi de probabilité.

Correction En supposant que les quatre faces soient bien des triangles équilatéraux, que la matière qui le constitue soit bien homogène, que les arêtes ont le même arrondi, que le marquage des faces n'ait pas rompu les symétries ... il paraît alors raisonnable de faire **le choix** d'une **loi équirépartie**.
On parlera de « *dé équilibré* ».

Numéro de la face	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Savoir-faire 2

Expérience A On lance deux dés équilibrés à quatre faces numérotées 1, 2, 3 et 4. On note les deux nombres obtenus.
Proposer un modèle, appelé « *Modèle A* », pour cette expérience aléatoire

Expérience B On lance deux dés équilibrés à quatre faces numérotées 1,2,3,4. On note le produit des deux nombres.
Proposer un modèle, appelé « *Modèle B* », pour cette expérience aléatoire

Expérience C On lance 2 dés équilibrés à quatre faces numérotées 1,2,3,4. On relève le plus grand des deux nombres.
Proposer un modèle, appelé « *Modèle C* », pour cette expérience aléatoire.

Expérience D On lance deux dés équilibrés à quatre faces numérotées 1,2,3,4. On note la somme des deux nombres.
Proposer un modèle, appelé « *Modèle D* », pour cette expérience aléatoire

Correction

Expérience A

Explication

Que les dés soient de couleur ou pas ne change pas les probabilités.

On peut imaginer qu'un dé est jaune et l'autre bleu (sinon rien n'empêche de mettre une marque au feutre sur l'un).
Pour relever les numéros, on convient d'abord de relever le numéro du dé jaune puis celui du dé bleu.

Cette façon de penser permet de ne pas favoriser, par exemple, (1; 3) au détriment de (3; 1): si on a tendance à relever plutôt le plus petit nombre avant le plus grand, on introduirait un biais (façon de procéder qui fausse le résultat).

*Pour tenir compte de l'ordre, on note les issues à l'aide d'un **couple** de nombres.*

Il y a 4×4 issues possibles (on ne dresse la liste complète que si elle demandée) :

(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)
(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)
(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)
(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)

Réponse

On peut **choisir** une **loi équirépartie**. Ce qui revient à supposer que :

- chaque dé est bien équilibré : sur un dé aucune face n'est favorisée
- les résultats des deux dés sont indépendants : la manière de lancer ne favorise aucun dé

Chacune des 16 issues à la même probabilité : $\frac{1}{16}$

Réponse en utilisant un tableau

1 ^{er} dé \ 2 ^{ème} dé	1	2	3	4
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)

On « distribue » à chacune des 16 cases la même chance d'être tirée.

La probabilité de chaque issues est de $\frac{1}{16}$

Expérience B On peut s'appuyer sur un tableau

Produit

2 ^{ème} dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

On attribue les mêmes chances à chacune des **cases** (en non pas à chaque résultat possible) : $\frac{1}{16}$

« Modèle B » : Loi de probabilité

Issues	1	2	3	4	6	8	9	12	16
Probabilités	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Expérience C On peut s'appuyer sur un tableau

Le plus grand

2 ^{ème} dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

On attribue les mêmes chances à chacune des **cases** (en non pas à chaque résultat possible) : $\frac{1}{16}$

« Modèle C » : Loi de probabilité

Issues	1	2	3	4
Probabilités	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Expérience D On peut s'appuyer sur un tableau

Somme

2 ^{ème} dé \ 1 ^{er} dé	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

On attribue les mêmes chances à chacune des **cases** (en non pas à chaque résultat possible) : $\frac{1}{16}$

« Modèle D » : Loi de probabilité

Issues	2	3	4	5	6	7	8
Probabilités	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

II. Notion de variable aléatoire (piste noire ... au programme de première)

Idée : Une **variable aléatoire** est une modélisation mathématique de « quantité aléatoire ».

Les modèles B , C et D découlent directement du modèle A .

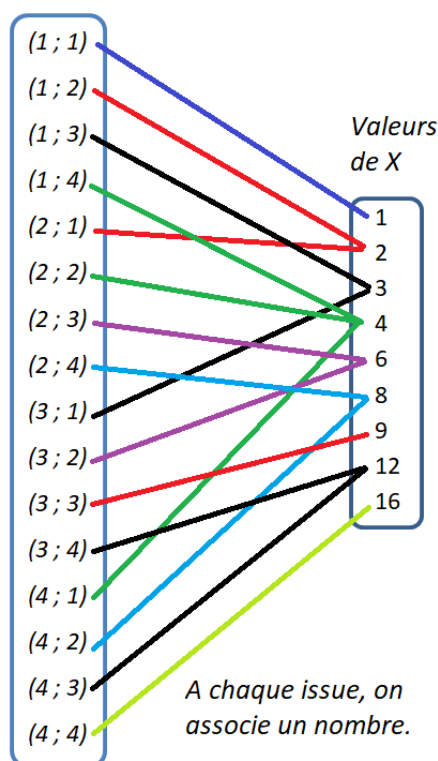
La notion de variable aléatoire permet de « transporter » le modèle A (assez naturel) pour calculer des probabilités sur les quantités des modèles B , C et D .

Définition On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini. On note Ω l'univers.
Une variable aléatoire est une fonction qui à chaque issue associe un nombre.

Exemple : Notons Ω l'univers de l'expérience aléatoire A . Chaque issue est un couple de nombre.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue associe le produit des deux nombres

Visualiser la variable aléatoire X

Issues
de l'expérience
aléatoire A



- L'événement « $X = 1$ » est réalisé par l'issue $(1; 1)$
 $P(X = 1) = P(\{(1; 1)\}) = \frac{1}{16}$
- L'événement « $X = 2$ » est réalisé par les issues $(1; 2)$ et $(2; 1)$
 $P(X = 2) = P(\{(1; 2); (2; 1)\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
- L'événement « $X = 3$ » est réalisé par les issues $(1; 3)$ et $(3; 1)$
 $P(X = 3) = P(\{(1; 3); (3; 1)\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
- L'événement « $X = 4$ » est réalisé par $(1; 4); (2; 2)$ et $(4; 1)$
 $P(X = 4) = P(\{(1; 4); (2; 2); (4; 1)\}) = \frac{3}{16}$
- L'événement « $X = 6$ » est réalisé par les issues $(2; 3)$ et $(3; 2)$
 $P(X = 6) = P(\{(2; 3); (3; 2)\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
- L'événement « $X = 8$ » est réalisé par les issues $(4; 2)$ et $(2; 4)$
 $P(X = 8) = P(\{(4; 2); (2; 4)\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
- L'événement « $X = 9$ » est réalisé par la seule issue $(3; 3)$
 $P(X = 9) = P(\{(3; 3)\}) = \frac{1}{16}$
- L'événement « $X = 12$ » est réalisé par les issues $(3; 4)$ et $(4; 3)$
 $P(X = 12) = P(\{(3; 4); (4; 3)\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
- L'événement « $X = 16$ » est réalisé par la seule issue $(4; 4)$
 $P(X = 16) = P(\{(4; 4)\}) = \frac{1}{16}$

En général, on ne visualise pas les correspondances ... on les utilise.

Comprendre

On s'appuie sur la probabilité connue dans le modèle A

$$P(X = 8) = P(\{(4; 2); (2; 4)\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Probabilité à calculer dans le modèle B

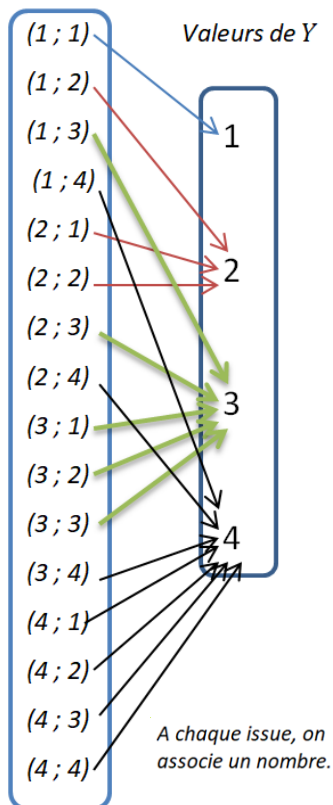
Loi de probabilité de la **variable aléatoire X**

on note $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ les valeurs ordonnées de X . Exemple : $x_6 = 8$

x_i	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Savoir-faire 3 Notons Ω l'univers de l'expérience aléatoire A . Chaque issue est un couple de nombre.
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque issue associe le plus grand des deux nombres

Issues de
l'expérience
aléatoire A



- L'événement « $Y = 1$ » est réalisé par l'issue (1; 1)

$$P(Y = 1) = P(\{(1; 1)\}) = \frac{1}{16}$$

- L'événement « $Y = 2$ » est réalisé par les issues (1; 2); (2; 2) et (2; 1)

$$P(Y = 2) = P(\{(1; 2); (2; 2); (2; 1)\}) = \frac{3}{16}$$

- L'événement « $Y = 3$ » est réalisé par les issues (1; 3); (2; 3); (3; 3); (3; 1); (3; 2)

$$P(Y = 3) = P(\{(1; 3); (2; 3); (3; 3); (3; 1); (3; 2)\}) = \frac{5}{16}$$

- L'événement « $Y = 4$ » est réalisé par les issues (1; 4); (2; 4); (3; 4); (4; 4); (4; 1); (4; 2); (4; 3)

$$P(Y = 4) = P(\{(1; 4); (2; 4); (3; 4); (4; 4); (4; 1); (4; 2); (4; 3)\}) = \frac{7}{16}$$

Loi de probabilité de la variable aléatoire Y

Issues	1	2	3	4
Probabilités	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Savoir-faire 4 Savoir donner la loi d'une variable aléatoire

Un jeu consiste à miser 1 euro puis de lancer deux dés.

- Si un « double six » sort, le joueur reçoit 5 euros.
- Si un autre « double » sort, le joueur est récupérer sa mise
- Sinon le joueur perd sa mise

Soit Z la variable aléatoire qui donne le gain du joueur en euros. Donner la loi de Z

Correction

La variable aléatoire Z peut prendre les valeurs 4 euros ; 0 euro ; -1 euros

La loi de probabilité de Z se déduit du « modèle A » précédent.

L'événement « $Z = 4$ » est réalisé par la seule issue (6 ; 6) donc $P(Z = 4) = \frac{1}{16}$

$$P(Z = -1) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 4) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{5}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

z_i	-1	0	4
$P(Z = z_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

III. Modélisation à partir de fréquences observées dans la réalité

Bien souvent, dans la réalité, la démarche est plus empirique : à partir d'un grand nombre de données recueillies on va dégager un modèle (penser aux assurances voitures par exemple).

Savoir-faire 5 : Ursule a fabriqué un dé en bois qui comporte quatre faces numérotées de 1 à 4. Pour le tester, il l'a lancé 5312 fois. Il a obtenu 635 fois le numéro 1, 640 fois le numéro 2, 1372 fois le numéro 3. Rien qu'en observant le cube d'Ursule, la pyramide triangulaire obtenue n'étant pas régulière, le modèle d'équiprobabilité ne paraît pas adapté. Proposer une loi de probabilité.

Correction :

Fréquences observées

Les fréquences de sortie de 1, 2, 3 et 4 sont :

$$f_1 = \frac{635}{5312} \approx 0,12$$

$$f_2 = \frac{640}{5312} \approx 0,12$$

$$f_3 = \frac{1372}{5312} \approx 0,258$$

$$f_4 = \frac{5312-635-640-1372}{5312} \approx 0,502$$

Ainsi, sur les 5312 lancers d'Ursule, le 1 est sorti dans 12 % des lancers, le 2 dans 12 % des lancers, le 3 dans 26 % des lancers, le 4 dans 50 % des lancers.

Modélisation

5312 lancers est grand par rapport aux 4 issues possibles : sauf exception, les fréquences observées devraient être « stabilisées ».

On **choisit arbitrairement** les fréquences observées comme probabilité pour notre modèle.

Loi de probabilités

Issues	1	2	3	4
Probabilités	0,12	0,12	0,258	0,502

IV. Modéliser c'est faire un choix : la proportion filles / garçons à la naissance

Expérience aléatoire : On tire au hasard un bébé parmi tous ceux qui sont nés hier dans une maternité en France. On regarde s'il s'agit d'une fille ou d'un garçon. Modéliser.

Première modélisation : On décide à priori qu'il y a autant de chances que ce soit un garçon ou une fille

Issues	Fille	Garçon
Probabilités	0,5	0,5

Seconde modélisation : On s'appuie sur les **connaissances statistiques du passé** qu'ont les démographes

« En 1660, le négociant anglais GRAUNT découvrait, d'après les registres des baptêmes anglicans, un rapport de 105 garçons pour 100 filles, rapport présentant deux étranges particularités : sa remarquable constance d'un pays à l'autre et d'une époque à l'autre et son accroissement après les guerres ou les famines ! »¹.

En choisissant de prendre pour probabilités les fréquences, on obtient :

Issues	Fille	Garçon
Probabilités	0,488	0,512

Comparaison des deux modèles : Les deux modèles conviennent ... cependant en 2019

en France, il y a eu 349 105 naissances de filles sur 714 029 naissances au total :

$$\text{Proportion filles} = \frac{349105}{714029} \approx 0,489$$

en Allemagne, il y a eu 378 798 naissances de filles sur 778 090 naissances au total :

$$\text{Proportion filles} = \frac{378798}{778090} \approx 0,487$$

Au Québec, il y a eu 40 636 naissances de filles sur 84 309 naissances au total :

$$\text{Proportion filles} = \frac{40636}{84309} \approx 0,482$$

Le second modèle paraît un peu plus efficace !

¹ ¹ Hasard et probabilités, histoire, théorie et application des probabilités par Philippe PICARD - Vuibert, Paris juin 2007.

A retenir

Cadre expérimental :

statistiques (analyse de résultats réels)
fréquences observées

Cadre théorique :

calcul des **probabilités** (étude de modèles)
probabilité d'un événement



Loi (vulgarisée) des grands nombres (par cœur)

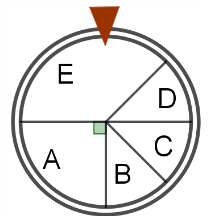
Lorsque la taille de l'échantillon est grande, sauf exception, les fréquences observées sont proches des probabilités

V. Savoir donner une loi de probabilité

Donner une **loi de probabilité** (on dit aussi donner la **distribution** des probabilités), c'est préciser les issues et la probabilité de chacune.

A. Les « roulettes »

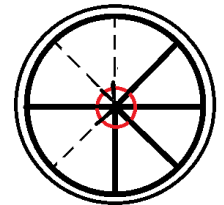
Savoir- faire 6 On considère la roue de loterie ci-contre. Les angles au centre des secteurs B, C, D valent 45° . Proposer une loi de probabilité.



Correction

On choisit de prendre des probabilités proportionnelles à l'angle au centre des secteurs.

Secteur	A	B	C	D	E
Probabilité	$\frac{90}{360}$ $= 0,25$	$\frac{45}{360}$ $= 0,125$	$\frac{45}{360}$ $= 0,125$	$\frac{45}{360}$ $= 0,125$	$\frac{135}{360}$ $= 0,375$



Chaque secteur angulaire représente $\frac{1}{8}$ du disque.
Chacun des angles des 8 secteurs mesure 45° .

B. Les yeux marrons

Savoir- faire 7 En France avec 70 % de la population a les yeux marron.
On tire au hasard une personne parmi les français nés un premier janvier. On note S (comme succès) si elle a les yeux marrons et E (comme échec) sinon. Proposer une loi de probabilité.

Correction On choisit de :

- Supposer que la fréquence des « yeux marrons » est la même parmi ceux qui sont « nés un 1^{er} janvier » que dans toute la population française (pas de lien entre « naître un 1^{er} janvier » et « avoir les yeux marrons »).
- Prendre la fréquence des « yeux marrons » parmi ceux qui « sont nés un 1^{er} janvier » comme probabilité.

Issues	E	S
Probabilité	0,3	0,7

C. Les tirages avec remise

Savoir- faire 8 Un sac contient 3 boules indiscernables au toucher : deux boules noires et une boule rouge.

On tire deux boules au hasard **avec remise**. A chaque tirage, on note la couleur obtenue.

« avec remise » veut dire qu'on tire une première boule et sa couleur, puis on la remet avant de tirer une seconde fois. A chaque tirage, le contenu du sac ne change pas. Une même boule peut sortir deux fois de suite.

Proposer une loi de probabilité.

Correction méthode 1 : Avec un tableau obtenu en **distinguant** les boules noires

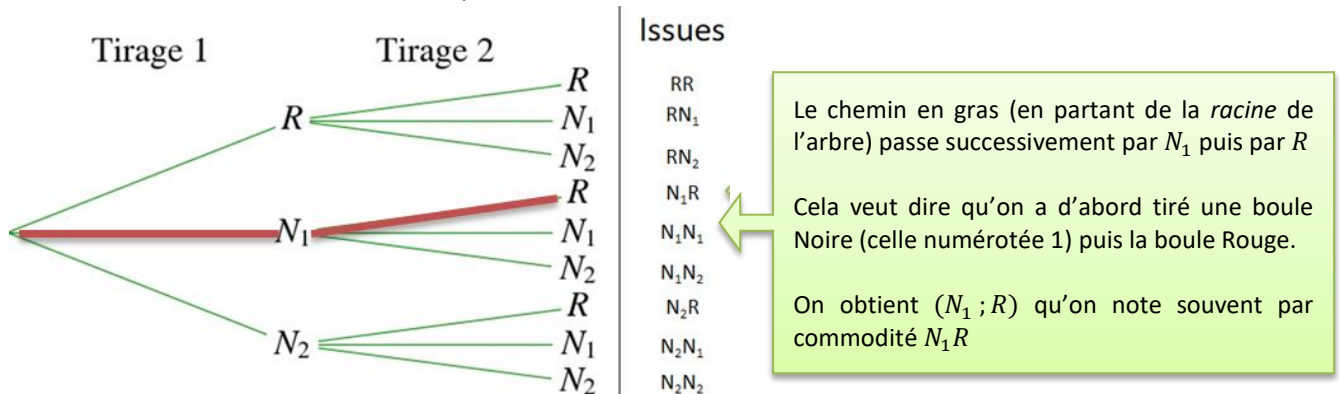
On imagine, qu'avec un feutre, on numérote les boules noires 1 et 2 : cela ne change pas leur chance d'être choisi.

Deuxième tirage Premier tirage	R	N_1	N_2
R	$(R; R)$	$(R; N_1)$	$(R; N_2)$
N_1	$(N_1; R)$	$(N_1; N_1)$	$(N_1; N_2)$
N_2	$(N_2; R)$	$(N_2; N_1)$	$(N_2; N_2)$

On choisit d'attribuer les mêmes chances à chaque couple du tableau

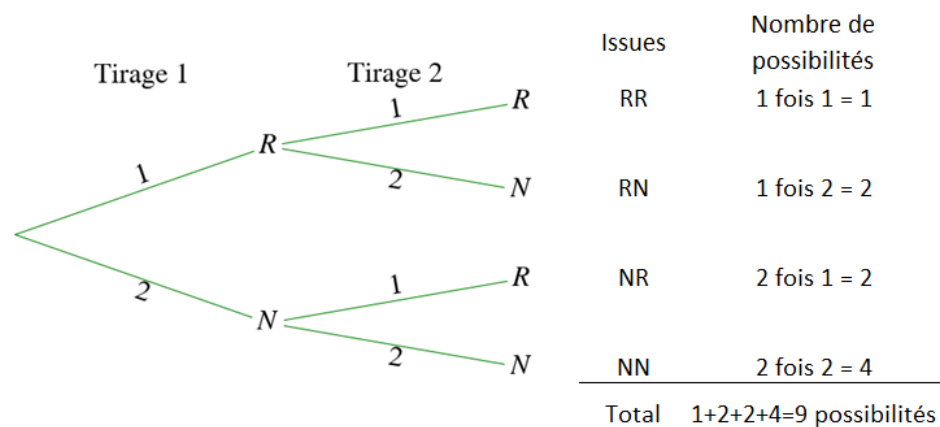
Correction méthode 2 : A l'aide d'un « **arbre de dénombrement** » et en **distinguant** les boules noires

On attribue les mêmes chances à chaque chemin dans l'arbre.



Correction méthode 3 : A l'aide d'un « **arbre de dénombrement** » et en **ne distinguant pas** les boules noires

Sur les branches de l'arbre, on va porter les possibilités



Loi de probabilité Dans toutes les méthodes ci-dessus, on obtient comme modèle :

Issues	RR	RN	NR	NN
Probabilités	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

D. Tirages SANS remise

Savoir-faire 9 Un sac contient 3 boules indiscernables au toucher : deux boules noires et une boule rouge.

On tire deux boules au hasard **sans remise**. A chaque tirage, on note la couleur obtenue.

Proposer une loi de probabilité.

« *sans remise* » veut dire qu'on tire une première boule et sa couleur, puis **on ne la remet pas** avant de tirer une seconde fois. A chaque tirage, le contenu du sac change. Une même boule ne peut pas sortir deux fois.

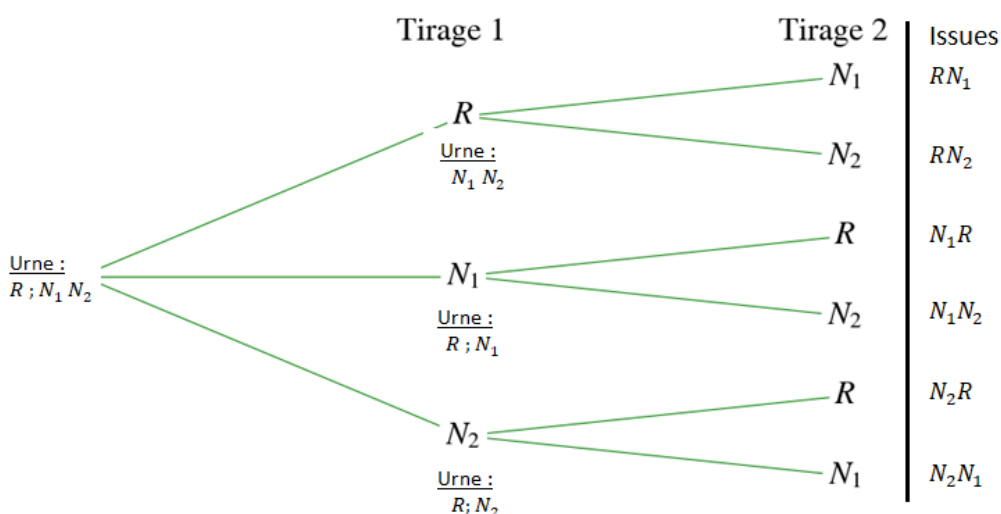
La seconde épreuve aléatoire **va dépendre du résultat de la première** (le contenu de l'urne a changé).

Correction méthode 1 : Tableau obtenu en **distinguant** les boules noires

On imagine, qu'avec un feutre, on numérote les boules noires 1 et 2 : cela ne change pas leur chance d'être choisi.

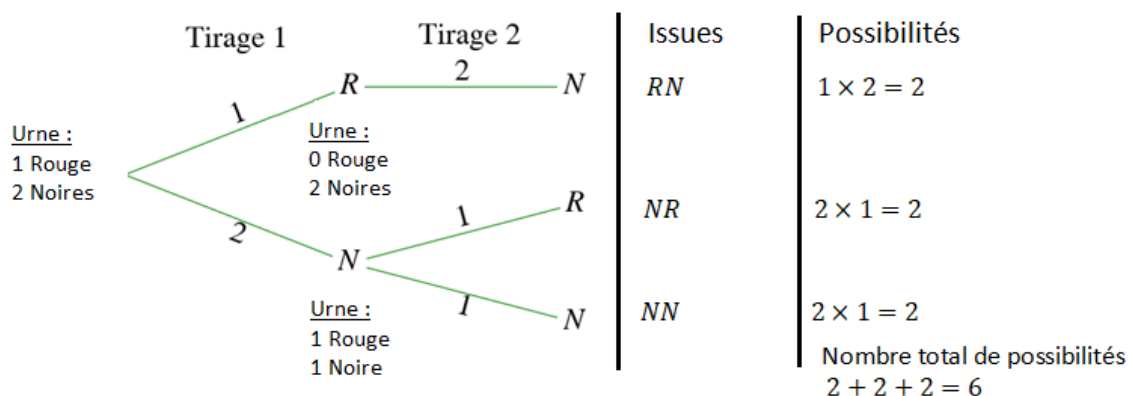
Deuxième tirage Premier tirage	R	N_1	N_2
R	Impossible : après le premier tirage, il n'y a plus la boule Rouge	$(R ; N_1)$	$(R ; N_2)$
N_1	$(N_1 ; R)$	Impossible : après le premier tirage, il n'y a plus la boule Noire numérotée 1	$(N_1 ; N_2)$
N_2	$(N_2 ; R)$	$(N_2 ; N_1)$	Impossible : après le premier tirage, il n'y a plus la boule Noire numérotée 2

Correction méthode 2 : A l'aide d'un « **arbre de dénombrement** » et en **distinguant** les boules noires



On choisit d'attribuer à chaque **chemin** dans l'arbre les mêmes chances.

Correction méthode 3 : A l'aide d'un « **arbre de dénombrement** » sans **distinguer** les boules noires
 Sur chaque branche, on porte les « possibilités ».



Loi de probabilité

Les trois méthodes conduisent à la même loi de probabilité.

La loi est **équirépartie** : chaque issue a la même probabilité.

Issues	RN	NR	NN
Probabilités	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

VI. Dénombrements à l'aide d'arbres

A. Calculer des probabilités dans le cas d'une expérience à deux épreuves

Savoir-faire 10 Une urne contient deux jetons marqués 1 et 2.
On dispose aussi d'un paquet de trois cartes.



On tire au hasard² un jeton puis une carte.

1) Construire un arbre décrivant l'univers de cette expérience aléatoire.

2) On considère les événements

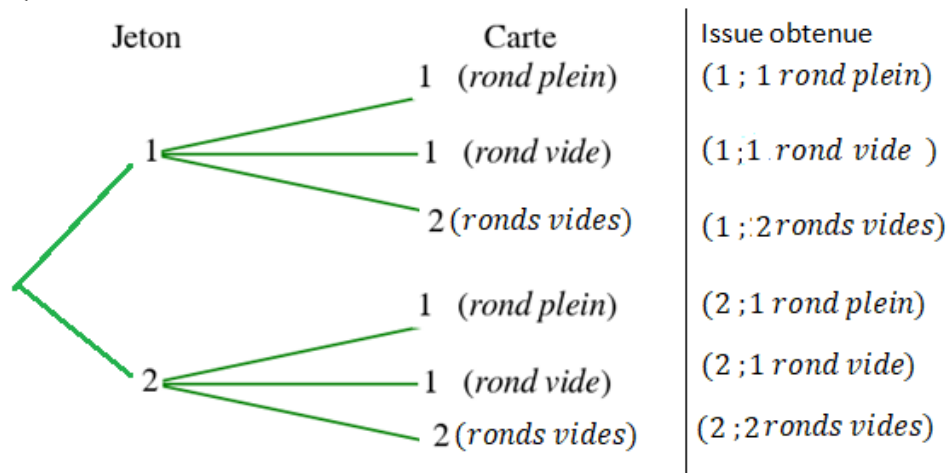
N : « le nombre sur le jeton et le nombre de ronds sur la carte sont identiques »

R : « le nombre sur le jeton et le nombre de ronds pleins sur la carte sont identiques »

Calculer $P(N)$, $P(\bar{R})$, $P(N \cap \bar{R})$

Correction

• Question 1



- **Question 2** On fait le choix de l'équiprobabilité : chacune des 6 issues a la même probabilité.

$$N = \{ (1 ; 1 \text{ rond plein}) ; (1 ; 1 \text{ rond vide}) ; (2 ; 2 \text{ ronds vides}) \}$$

Une explication : dans une situation d'équiprobabilité $P(N) = \frac{\text{nombre d'issues de } N}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{3}{6} = 0,5$

Une autre : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent:

$$P(N) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$R = \{ (1 ; 1 \text{ rond plein}) \} \quad \text{donc } P(R) = \frac{1}{6} \quad \text{donc } P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$N \cap \bar{R} = \{ (1 ; 1 \text{ rond vide}) \} \quad \text{donc } P(N \cap \bar{R}) = \frac{1}{6}$$

B. « Tirage avec remise »

Savoir-faire 11 Dans un sac, on dépose quatre lettres de Scrabble : « a », « b », « c », « d ».

On tire au hasard et avec remise deux lettres. Après chaque tirage, on note la lettre obtenue.

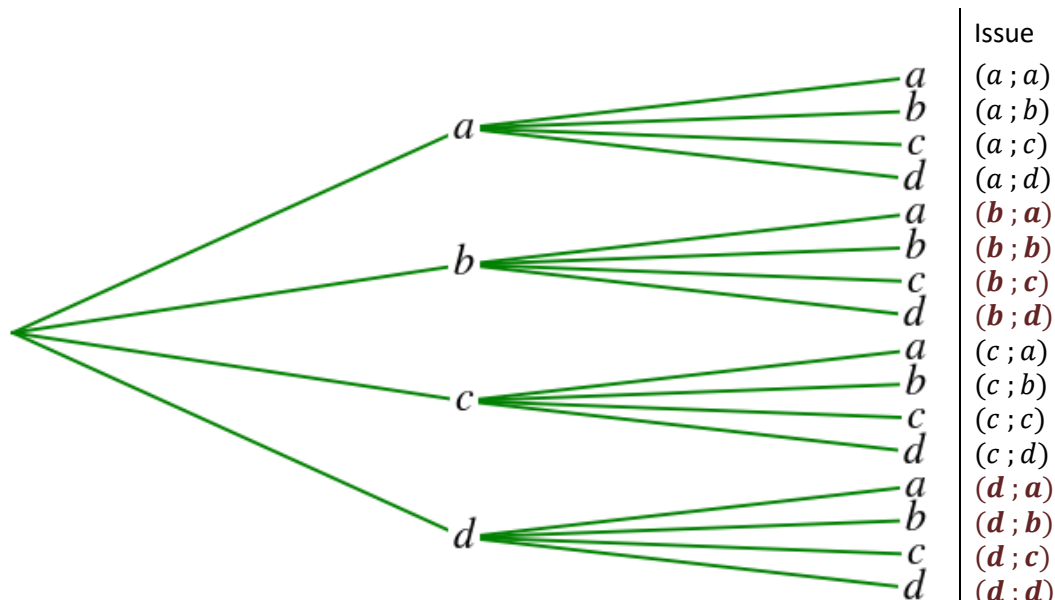
1. Construire un arbre décrivant l'univers de cette expérience aléatoire.

2. Soit A : « on a tiré au moins une lettre a ». Calculer $P(A)$

² Le mot *hasard* vient de l'arabe *al zhar* qui désigne un dé à jouer

Correction

• Question 1



- **Question 2** On fait le choix de l'équiprobabilité : chacune des 16 issues a la même probabilité.

$$A = \{ (a; a) ; (a; b) ; (a; c) ; (a; d) ; (b; a) ; (c; a) ; (d; a) \} \quad P(A) = \frac{7}{16}$$

C. « Tirage sans remise »

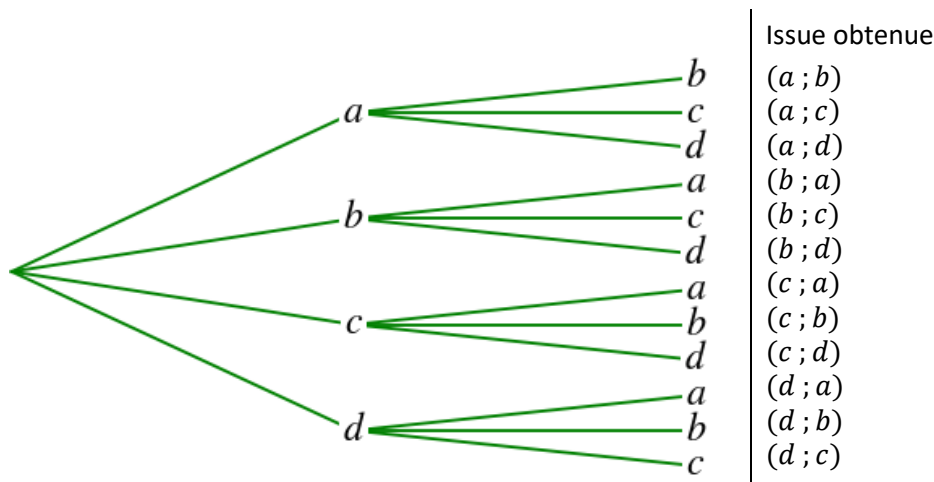
Savoir-faire 12 Dans un sac, on dépose quatre lettres de *Scrabble* : « a », « b », « c », « d ».

On tire au hasard sans remise deux lettres. Après chaque tirage, on note la lettre obtenue.

1. Construire un arbre décrivant l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Soit A : « on a tiré au moins une lettre a ». Calculer $P(A)$

Correction

• Question 1



- **Question 2** On fait le choix de l'équiprobabilité : chacune des 12 issues a la même probabilité.

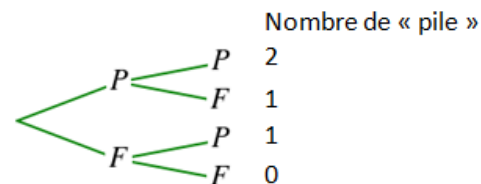
$$A = \{ (a; b) ; (a; c) ; (a; d) ; (b; a) ; (c; a) ; (d; a) \} \quad P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

D. Répétitions dans les mêmes conditions (de manière indépendante)

Savoir-faire 13 On lance simultanément deux pièces de 1 euros. On note le nombre de « pile » obtenus. Il y a donc trois issues possibles : 0 pile, 1 pile, 2 piles. Donner la loi de probabilité.

Correction Loi de probabilité

Nombre de pile	0	1	2
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



On fait le choix d'affecter la même probabilité à chaque chemin dans l'arbre de dénombrement

VII. Utilisations de tableaux

Savoir-faire 14 Savoir lire un tableau

Le sang humain est classés en quatre groupes sanguins : A , B , AB et O .

Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang possède ce facteur, il est de Rhésus positif (noté Rh^+). S'il ne l'a pas, il est dit de Rhésus négatif (noté Rh^-)

Voici les fréquences dans la population française :

Groupe sanguin Rhésus	O	A	B	AB
Rh^-	37 %	39 %	7 %	2 %
Rh^+	6 %	6 %	2 %	1 %

On tire au sort un individu parmi la population française. On considère les deux événements :

B : « l'individu est du groupe B » et N : « l'individu est de Rhésus négatif ».

- Comment noter l'événement « l'individu n'est pas du groupe B » ? sa probabilité ?
- Comment noter l'événement « l'individu est de Rhésus positif » ? sa probabilité ?
- Comment noter l'événement « l'individu est B^+ (du groupe B et de Rhésus positif) ? sa probabilité ?
- Comment noter l'événement « Rhésus négatif ou du groupe B » ? sa probabilité ?
- Comment noter l'événement « l'individu est ni Rh^- , ni du groupe B » ? sa probabilité ?
- Comment noter l'événement « l'individu est Rh^- mais pas du groupe B » ? sa probabilité ?

Réponses Chacun des pourcentages du tableau est pris par rapport à la population française totale.

Comme les fréquences ont été établies sur un grand nombre de français, on peut penser qu'elles donnent une bonne estimation des probabilités.

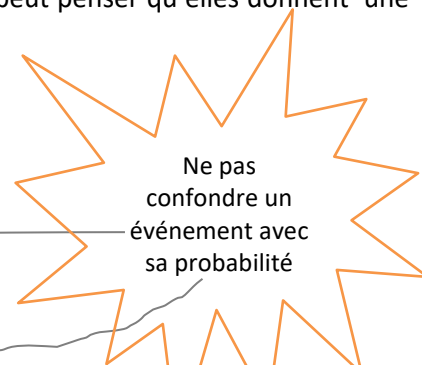
Groupe Rhésus	O	A	B	AB	Total
Rh^-	0,37	0,39	0,07	0,02	0,85
Rh^+	0,06	0,06	0,02	0,01	0,15
Total	0,43	0,45	0,09	0,03	1

1) L'événement se note : $\bar{B}$ $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,09 = 0,91$

2) L'événement se note : $\bar{N}$
 $P(N) = 0,85$ donc $P(\bar{N}) = 1 - P(N) = 1 - 0,85 = 0,15$

3) L'événement se note : $\bar{N} \cap B$ $P(\bar{N} \cap B) = 0,02$

4) L'événement se note : $N \cup B$
 • $P(N \cup B) = 0,37 + 0,39 + 0,07 + 0,02 + 0,02 = 0,85$



Groupe Rhésus	O	A	B	AB	Total
Rh^-	0,37	0,39	0,07	0,02	0,85
Rh^+	0,06	0,06	0,02	0,01	0,15
Total	0,43	0,45	0,09	0,03	1

Groupe Rhésus	O	A	B	AB	Total
Rh^-	0,37	0,39	0,07	0,02	0,85
Rh^+	0,06	0,06	0,02	0,01	0,15
Total	0,43	0,45	0,09	0,03	1

- Autre idée :

$$P(N \cup B) = P(N) + P(B) - P(N \cap B) \\ = 0,85 + 0,09 - 0,07 = 0,87$$

5) L'événement se note : $\bar{N} \cap \bar{B}$

- $P(\bar{N} \cap \bar{B}) = 0,06 + 0,06 + 0,01 = 0,13$

- Autre idée : $\bar{N} \cap \bar{B} = \overline{N \cup B}$

$$P(\bar{N} \cap \bar{B}) = P(\overline{N \cup B}) = 1 - P(N \cup B) = 1 - 0,87 = 0,13$$

Groupe Rhésus	O	A	B	AB	Total
Rh ⁻	0,37	0,39	0,07	0,02	0,85
Rh ⁺	0,06	0,06	0,02	0,01	0,15
Total	0,43	0,45	0,09	0,03	1

6) L'événement se note : $N \cap \bar{B}$

- $P(N \cap \bar{B}) = 0,37 + 0,39 + 0,02 = 0,78$

- Autre idée : $N = (N \cap B) \cup (N \cap \bar{B})$

$(N \cap B)$ et $(N \cap \bar{B})$ sont incompatibles (intersection vide) : $(N \cap B) \cap (N \cap \bar{B}) = \emptyset$

$$P(N) = P(N \cap B) + P(N \cap \bar{B}) - P(\emptyset) \text{ donc } P(N \cap \bar{B}) = P(N) - P(N \cap B) = 0,85 - 0,07 = 0,78$$

Groupe Rhésus	O	A	B	AB	Total
Rh ⁻	0,37	0,39	0,07	0,02	0,85
Rh ⁺	0,06	0,06	0,02	0,01	0,15
Total	0,43	0,45	0,09	0,03	1

Savoir-faire 15 Compléter un tableau en le justifiant

Soit A et B deux événements d'un même espace probabilisé sur un univers E .

Compléter le tableau de probabilités en justifiant vos calculs puis interpréter le.

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,2		
$\bar{A}$		0,24	
Total	0,45		1

Correction : Voici des étapes possibles repérées de a à f (d'autres déroulements sont possibles)

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,2	f	e
$\bar{A}$	c	0,24	d
Total	0,45	b	a

a. La somme des probabilités des issues vaut 1 : $P(E) = 1$

b. $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,45 = 0,55$

c. Comme chaque issue de B est soit dans $A \cap B$, soit dans $\bar{A} \cap B$ mais **pas dans les deux** :

$P(B) = \text{somme des probabilités des issues de } B$

$$= P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

$$\text{donc } P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,45 - 0,2 = 0,25$$

Comme

- $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles

- $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

On a : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

d. Comme chaque issue de $\bar{A}$ est soit dans $\bar{A} \cap B$, soit dans $\bar{A} \cap \bar{B}$ mais **pas dans les deux** :

$P(\bar{A}) = \text{somme des probabilités des issues de } \bar{A}$

$$= P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$\text{Donc } P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,25 + 0,24 = 0,49$$

Comme

- $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ sont incompatibles

- $\bar{A} = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

On a : $P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$

e. $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,49 = 0,51$

- f. Comme chaque issue de $\bar{B}$ est soit dans $\bar{A} \cap \bar{B}$, soit dans $A \cap \bar{B}$ mais **pas dans les deux** :

$$P(\bar{B}) = \text{somme des probabilités des issues de } \bar{B} \\ = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap \bar{B})$$

$$\text{donc } P(\bar{B} \cap A) = P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,55 - 0,24 = 0,31$$

Comme

- $\bar{A} \cap \bar{B}$ et $A \cap \bar{B}$ sont incompatibles
- $\bar{B} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B})$

$$\text{On a : } P(\bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap \bar{B})$$

Réponses

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,2	0,31	0,51
$\bar{A}$	0,25	0,24	0,49
Total	0,45	0,55	1

$$P(A \cap B) = 0,2 \quad P(A \cap \bar{B}) = 0,31 \quad P(A) = 0,51$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,25 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,24 \quad P(\bar{A}) = 0,49$$

$$P(B) = 0,45 \quad P(\bar{B}) = 0,55 \quad P(E) = 1$$