

Vecteurs colinéaires

Dans tout le chapitre, on utilise un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ que conformément au programme on choisit orthonormé mais la plus part des résultats restent vrais dans un repère quelconque.

I. Rappels : Produit d'un vecteur par un réel

Produit d'un vecteur par un réel Soit k un réel et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x; y)$
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(kx; ky)$

Exemple : $\vec{u}(-8; 9)$ Calculer les coordonnées de $-4\vec{u}$; $\frac{2}{3}\vec{u}$; $\sqrt{3}\vec{u}$

- $-4\vec{u}(-4 \times (-8); -4 \times 9) = (32; -36)$
- $\frac{2}{3}\vec{u}\left(\frac{2}{3} \times (-8); \frac{2}{3} \times 9\right) = \left(\frac{-16}{3}; 6\right)$
- $\sqrt{3}\vec{u}(-8\sqrt{3}; 9\sqrt{3})$

Interprétation géométrique Pour $k \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$:

- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction
- Si $k > 0$, $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens
Si $k < 0$, $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens opposé
- La norme de $k\vec{u}$ vaut $|k|$ fois celle de $\vec{u}$ ce qui s'écrit $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$
Exemples : $\|3\vec{u}\| = 3 \times \|\vec{u}\|$ $\|-2\vec{u}\| = 2 \times \|\vec{u}\|$

II. Vecteurs colinéaires

Déterminant de deux vecteurs

On appelle *déterminant* de $\vec{u}(x; y)$ et de $\vec{v}(x'; y')$ de nombre réel $xy' - x'y$

On le note $\det(\vec{u}; \vec{v})$ ou encore $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Attention à l'ordre puisqu'en général : $\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq \det(\vec{v}; \vec{u})$



Exercice 4 : Savoir calculer un déterminant

$\vec{u}(-7; 3)$ et $\vec{v}(-4; 5)$.

1. Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$
2. Calculer le déterminant de $\vec{v}$ et de $\vec{u}$

Réponse

1. $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -7 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7(5) - 3(-4) = -35 + 12 = -23$
2. $\det(\vec{v}; \vec{u}) = \begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -4(3) - 5(-7) = -12 + 35 = 23$

Définition : On dit que deux vecteurs sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Remarque: le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{0} = 0 \vec{u}$



Interprétation géométrique : deux vecteurs non nuls colinéaires ont la même direction.



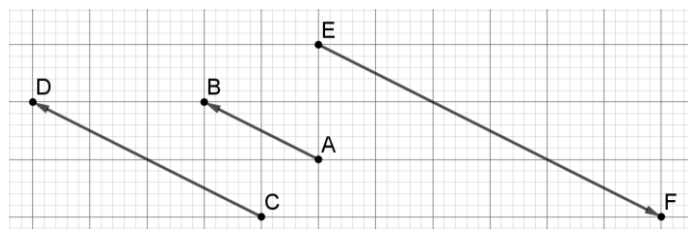
Interprétation numérique : deux vecteurs sont colinéaires quand ils ont leurs coordonnées proportionnelles

Attention au vocabulaire : on parle de *droites parallèles* mais de *vecteurs colinéaires*.

$\vec{CD}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires de même sens

$\vec{CD}$ et $\vec{EF}$ sont colinéaires de sens contraire

$\vec{EF}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires de sens contraire



Théorème $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement $xy' - x'y = 0$



Remarque : $xy' - x'y = 0$

revient à dire que
revient à dire que

les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ sont proportionnelles
 $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \det(\vec{v}; \vec{u}) = 0$

Exercice 6 : **Savoir tester si des vecteurs sont colinéaires**

$$\vec{u}(-3; 5) \quad \vec{v}(9; -15) \quad \vec{w}\left(\frac{7}{5}; \frac{7}{3}\right)$$

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

Correction :

1. **Première méthode :** en « devinant » le k (évident ici)

$$\text{On a : } \vec{v} = -3 \vec{u}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Deuxième méthode : avec le déterminant

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 5 & -15 \end{vmatrix} = -3 \times (-15) - 5 \times 9 = 45 - 45 = 0$$

Le déterminant vaut 0

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$2. \det(\vec{u}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} -3 & \frac{7}{5} \\ 5 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = -3 \times \left(\frac{7}{3}\right) - 5 \times \left(\frac{7}{5}\right) = -7 - 7 = -14$$

Le déterminant ne vaut pas 0

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Autre méthode (piste rouge) : On peut montrer qu'il n'existe pas de réel k tel que $k \vec{u} = \vec{w}$

$$k \vec{u} = \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} -3k = \frac{7}{5} \\ 5k = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{7}{5} \times \frac{1}{-3} \\ k = \frac{7}{3} \times \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{7}{15} \\ k = \frac{7}{15} \end{cases}$$

Comme k ne peut pas être égal à la fois $-\frac{7}{15}$ et $\frac{7}{15}$

Donc il n'existe pas de réel k tel que $k \vec{u} = \vec{w}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

IV. Formulaire (par cœur !)



$\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ désignent deux vecteurs, k désigne un réel, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ désignent deux points.

- Calcul des coordonnées d'un vecteur



$\overrightarrow{AB}$ (variation des abscisses de « A à B » ; variation des ordonnées de « A à B ») = $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

- Coordonnées d'un vecteur par un réel $k\vec{u} (kx ; ky)$
- Coordonnées de la somme de deux vecteurs $\vec{u} + \vec{v} (x + x' ; y + y')$
- Norme d'un vecteur $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ repère **orthonormé** indispensable (se déduit du théorème de Pythagore)
- Distance entre deux points $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ repère **orthonormé** indispensable
- $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ attention à l'ordre car en général $\det(\vec{u} ; \vec{v}) \neq \det(\vec{v} ; \vec{u})$

V. Colinéarité et géométrie

Lien entre vecteurs et droites parallèles



Théorème Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Explications : Dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires revient à dire qu'ils ont la même direction.

Exercice 7 : Savoir tester si des droites sont parallèles



$A(2; 3)$ $B(13; 1)$ $C(2; -1)$ $E(-31; 5)$ $H(-2; 3)$ $F(3; 2)$

1. Les droites (AB) et (CE) sont-elles parallèles ?
2. Les droites (AB) et (HF) sont-elles parallèles ?

Lien entre vecteurs et points alignés



Théorème Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires



Explications : Pour A, B, C distincts. Dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires revient à dire que : $(AB) \parallel (AC)$
Deux parallèles qui ont un point commun sont confondues (une droite est parallèle à elle-même)

Exercice 8 : Savoir tester si des points sont alignés $A(19; 6)$ $B(-2; -4)$, $D(2; -2)$ et $H(8; 1)$.



1. Les points B, D et H sont-ils alignés ?
2. Les points A, B, D sont-ils alignés ?

Réponse exercice 7 :

1. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) = (13 - 2; 1 - 3) = (11; -2)$

$\overrightarrow{CE}(x_E - x_C; y_E - y_C) = (-31 - 2; 5 - (-1)) = (-33; 6)$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CE}) = \begin{vmatrix} 11 & -33 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 11 \times 6 - (-2) \times (-33) \\ = 66 - 66 = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires

Donc les droites (AB) et (CE) sont parallèles.

Autre idée pour prouver la colinéarité

On remarque que $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$

$$2. \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) = (13 - 2; 1 - 3) = (11; -2)$$

$$\overrightarrow{HF}(x_F - x_H; y_F - y_H) = (3 - (-2); 2 - 3) = (5; -1)$$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{HF}) = \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 11 \times (-1) - (-2) \times 5 = -11 + 10 = -1$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HF}$ ne sont pas colinéaires

Donc les droites (AB) et (HF) ne sont pas parallèles.

Réponse exercice 8 :

$$1. \overrightarrow{BD}(x_D - x_B; y_D - y_B) = (2 - (-2); -2 - (-4)) = (4; 2)$$

$$\overrightarrow{DH}(x_H - x_D; y_H - y_D) = (8 - 2; 1 - (-2)) = (6; 3)$$

$$\det(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{DH}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 2 \times 6 = 0 \quad (\text{on aurait pu aussi remarquer que } \frac{3}{2} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DH})$$

donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont colinéaires (on aurait pu montrer la colinéarité de $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BH}$ ou de $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{BH}$...)

donc B, D et H sont alignés.

$$2. \overrightarrow{BD}(4; 2)$$

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) = (-2 - 19; -4 - 6) = (-21; -10)$$

$$\det(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 4 & -21 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 4 \times (-10) - 2 \times (-21) = -40 + 42 = 2 \neq 0$$

Donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires

donc B, D et A ne sont pas alignés.