

I. Un peu de logique (piste rouge)

Prouver l'équivalence $-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

$$-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1$$

En ajoutant -1 à chaque membre d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (ayant les mêmes solutions)

$$-2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{-2}$$

En divisant chaque membre par -2 qui est négatif non nul, on obtient une inéquation équivalente $-2x + 1 \geq 0$

En résumé : $-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{-2} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Ainsi : $-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

On a utilisé des règles garantissant les équivalences. On ne dispose pas toujours de telles règles ...

Symbole $\Leftrightarrow$ entre deux assertions

Une assertion est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux (pas les deux). Exemples d'assertions :

Le nombre 3 est positif (vrai)	Pour $x = 2$, $3x + 1 \leq 5$ (vrai)	3 est négatif (faux mais c'est bien une assertion)
$2 \leq 5$ (vrai)	Pour $x = 7$, $3x + 1 \leq 5$ (faux)	$0 = 1$ (faux mais c'est bien une assertion)

Le symbole $\Leftrightarrow$ entre deux assertions signifie qu'elles sont équivalentes :

- « si l'une est vraie alors l'autre est vraie aussi »
- et par contraposition « si l'une est fausse alors l'autre est fausse aussi »

Par contre, il est impossible d'avoir l'une vraie et l'autre fausse !

Interprétation de $-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Comme « $-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ » est vrai (prouvé plus haut), les deux propositions « si ... alors ... » suivantes sont vraies

- « Si $-2x + 1 \geq 0$ alors $x \leq \frac{1}{2}$ »
- « Si $x \leq \frac{1}{2}$ alors $-2x + 1 \geq 0$ »

Propositions réciproques l'une de l'autre

La proposition « Si $-2x + 1 \geq 0$ alors $x \leq \frac{1}{2}$ » est vraie donc sa contraposée l'est aussi :

- Si on n'a pas $x \leq \frac{1}{2}$ alors on n'a pas $-2x + 1 \geq 0$
ce qui s'écrit plus simplement : « Si $x > \frac{1}{2}$ alors $-2x + 1 < 0$ »

La proposition « Si $x \leq \frac{1}{2}$ alors $-2x + 1 \geq 0$ » est vraie donc sa contraposée l'est aussi :

- Si on n'a pas $-2x + 1 \geq 0$ alors on n'a pas $x \leq \frac{1}{2}$
ce qui s'écrit plus simplement : « Si $-2x + 1 < 0$ alors $x > \frac{1}{2}$ »

Comme 0 est le seul réel à la fois positif et négatif, $-2x + 1 = 0$ pour (et seulement pour) $x = \frac{1}{2}$

En résumé : l'écriture compacte « $-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ » porte beaucoup d'informations dont entre autres

Si $x < \frac{1}{2}$	Si $x \leq \frac{1}{2}$	Si $x = \frac{1}{2}$
alors $-2x + 1$ est de signe +	alors $-2x + 1$ est de signe —	alors $-2x + 1 = 0$

Ce qui se traduit « mot pour mot » par le tableau de signes :

Valeurs de x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $-2x + 1$	+	0	—

II. Signe de $mx + p$

Théorème : pour $m \neq 0$



Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Signe de $mx + p$	signe de $-m$		signe de m

Formulation plus concise (mais moins rigoureuse)

$mx + p$ s'annule pour $x = -\frac{p}{m}$ ne pas apprendre par cœur $-\frac{p}{m}$, retrouver le en résolvant l'équation $mx + p = 0$

L'expression est du signe de m « à droite du zéro » et du signe contraire sinon

Savoir démontrer (piste rouge): on généralise, à l'aide du calcul littéral, les démarches suivies pour $-2x + 1$ et $2x + 1$

Cas $m < 0$

$$mx + p \geq 0$$

$$mx \geq -p$$

$$x \leq \frac{-p}{m}$$



comme m est négatif non nul

Cas $m > 0$

$$mx + p \geq 0$$

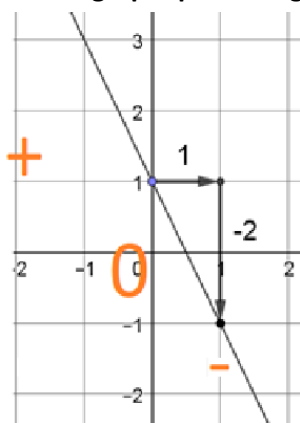
$$mx \geq -p$$

$$x \geq \frac{-p}{m}$$



comme m est positif non nul

Interprétation graphique des signes de $-2x + 1$ et de $2x + 1$

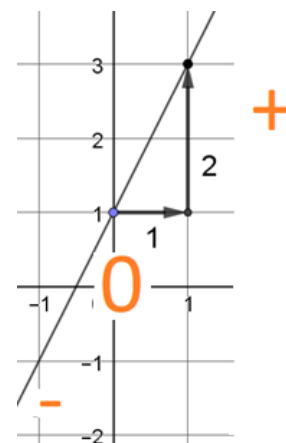


Soit g la fonction affine telle que $g(x) = -2x + 1$
 $g(x)$ est de la forme $mx + p$ avec $m = -2$ et $p = 1$

Vous remarquerez que l'on retrouve la ligne des signes de $-2x + 1$: $+$ 0 $-$

Soit f la fonction affine telle que $f(x) = 2x + 1$
 $f(x)$ est de la forme $mx + p$ avec $m = 2$ et $p = 1$

Vous remarquerez que l'on retrouve la ligne des signes de $2x + 1$: $-$ 0 $+$



IV. Une rédaction : plus rapide ?

Savoir-faire : Réduire au même dénominateur $A(x) = \frac{1}{3-2x} + \frac{1}{3+2x}$

Correction : $A(x)$ est définie lorsque les dénominateurs sont non nuls c'est-à-dire pour $x \neq \frac{3}{2}$ et $x \neq -\frac{3}{2}$

$$A(x) = \frac{3+2x}{(3-2x)(3+2x)} + \frac{3-2x}{(3-2x)(3+2x)} = \frac{6}{(3-2x)(3+2x)}$$

Savoir étudier le signe de $\frac{6}{(3-2x)(3+2x)}$

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de 6	+	+	+	+
Signe de $3 - 2x$ forme $mx + p$ avec $m = -2$	+	+	0	-
	signe de $-m$	signe de $-m$		signe de m
Signe de $3 + 2x$ forme $mx + p$ avec $m = +2$	-	0	+	+
	signe de $-m$	signe de $-m$		signe de m
Signe de $A(x)$	-	+	-	-

Un moyen mnémotechnique ...

$mx + p$ est du signe de m à « droite du 0 »