

Notion de fonctions mathématiques

I. Vocabulaire des fonctions

Définition *Définir une fonction* sur un intervalle c'est décrire un procédé qui à chaque nombre de l'intervalle associe un réel et un seul.

Souvent, mais pas toujours, pour décrire le procédé qui à un nombre x associe son image, on utilise une expression algébrique (une formule) qui donne directement l'image dès qu'on connaît x .

Notations Soit h la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par $h(t) = 2t^2$

- $[-5 ; 5]$ est **l'ensemble de définition** de h : seuls les nombres entre -5 (compris) et 5 (compris) ont une image ... et par exemple, 10 n'a pas d'image !
- t s'appelle la **variable**
- $h(t)$ se lit « h de t » désigne **l'image** de t .
Plus précisément, $h(t)$ désigne une l'expression algébrique qui donne l'image **en fonction de la** variable (c'est-à-dire qu'on peut donner la valeur de $h(t)$ dès qu'on connaît la valeur de t).
- De manière plus visuelle, on écrit parfois $h: t \mapsto 2t^2$ qui se lit « la fonction h qui à t associe $2t^2$ ».
Dans une première approche naïve, une fonction peut être vue comme une « boîte à calculs » qui contient un algorithme pour calculer l'image d'un nombre.
La fonction est symbolisée par la **flèche** $\mapsto$ qui marque la boîte à calculs « mettre au carré puis Multiplier le résultat par 2 »

II. Courbe représentative d'une fonction

Courbe représentative d'une fonction (définition)

Soit f une fonction d'ensemble de définition D (intervalle ou réunion d'intervalles).

Dans un repère, la **courbe représentative** (ou représentation graphique de f) C_f de la fonction f est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) telles que :

- $x \in D$ (ensemble de définition)
- $y = f(x)$.



On dit qu'une **équation de la courbe**, dans ce repère, est : $y = f(x)$

III. Définitions des fonctions affines et des fonctions linéaires

Définition Une **fonction affine** est une fonction par une expression $f(x) = mx + p$ avec m et p réels fixés.



Une **fonction linéaire** est une fonction définie par une expression $f(x) = mx$ avec m réel fixé.

Savoir tester si une fonction est affine, linéaire ou autre :

- a) f définie par $f(x) = \frac{-7x-3}{11}$ c) h définie par $h(x) = -4(x-3) - 12x$
b) g définie par $g(x) = (2x+3)^2 - 4x^2$ d) p définie par $p(x) = -(x+\sqrt{5})^2 - x^2$

Correction :

- a) $f(x) = \frac{-7x}{11} - \frac{3}{11} = -\frac{7}{11}x - \frac{3}{11}$ On reconnaît la forme $mx + p$ avec $m = -\frac{7}{11}$ et $p = -\frac{3}{11}$ donc f est affine.
b) $g(x) = (2x+3)^2 - 4x^2 = 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 = 12x + 9$
On reconnaît la forme $mx + p$ avec $m = 12$ et $p = 9$ donc g est affine
c) $h(x) = -4(x-3) - 12 = -4x + 12 - 12 = -4x$
On reconnaît la forme mx avec $m = -4$ donc h est linéaire

On reconnaît aussi la forme $mx + p$ avec $m = -4$ et $p = 0$ donc h est aussi affine

d) $p(x) = -(x + \sqrt{5})^2 - x^2 = -(x^2 + 2\sqrt{5}x + 5) - x^2 = -x^2 - 2\sqrt{5}x - 5 - x^2 = -2x^2 - 2\sqrt{5}x - 5$
 A cause du $-2x^2$, p n'est ni affine, ni linéaire.

Propriété : La représentation de la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ est la droite d'équation $y = mx + p$



IV. La fonction carrée :

Définition La fonction f telle que $f: x \mapsto x^2$ est appelée **la fonction carrée**. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.



Un tableau de valeur

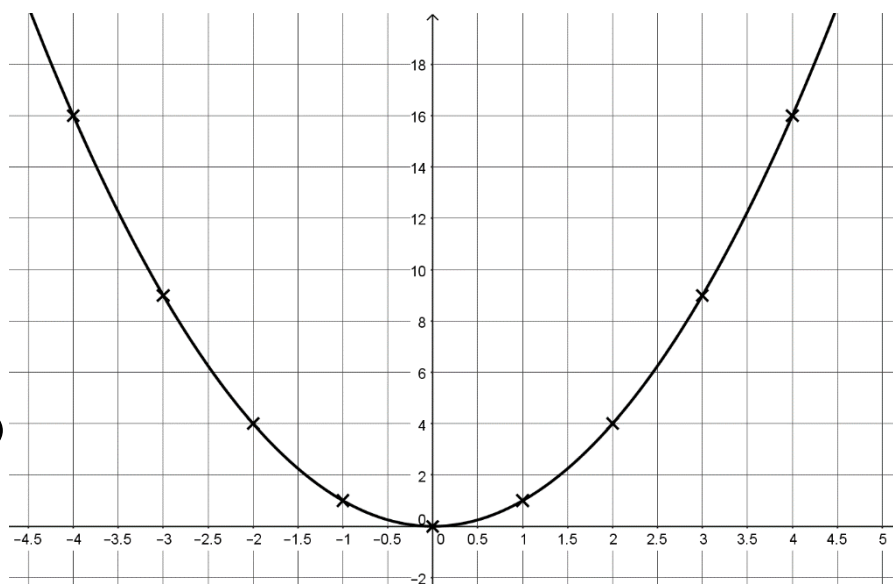
x	-4	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	16

Une représentation graphique

La courbe représentative, dans un repère orthogonal, admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

La courbe est une parabole.

A savoir tracer en moins de 3 minutes sans calculatrice



Savoir-faire : résolutions graphiques

- 1) Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = 10$. Expliquer.
- 2) Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = -1$. Expliquer.
- 3) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 < 6$. Expliquer.
- 4) Résoudre graphiquement l'équation $x^2 \geq 4$. Expliquer.

Correction On commence par tracer la courbe d'équation $y = x^2$

- 1) On cherche les points de la courbe dont l'ordonnée vaut 10. On lit leurs abscisses.
Les solutions sont environ $-3,2$ et environ $3,2$
- 2) On cherche les points de la courbe dont l'ordonnée vaut -1 . Il n'y en a pas donc l'équation n'a aucune solution.
- 3) On cherche les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement inférieure à 6. On lit leurs abscisses.
L'ensemble des solutions est $] - 2,45 ; 2,45 [$ (les bornes sont des valeurs approchées)
- 4) On cherche les points de la courbe dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 4. On lit leurs abscisses.
L'ensemble des solutions est $] - \infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$ ce qui signifie $x \in] - \infty ; -2]$ **ou** $x \in [2 ; +\infty[$

V. La fonction inverse

Définition



La fonction f telle que $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est appelée **la fonction inverse**.

Elle est définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$. Cet ensemble contient tous les réels sauf 0.

On le note parfois : $\mathbb{R}^*$

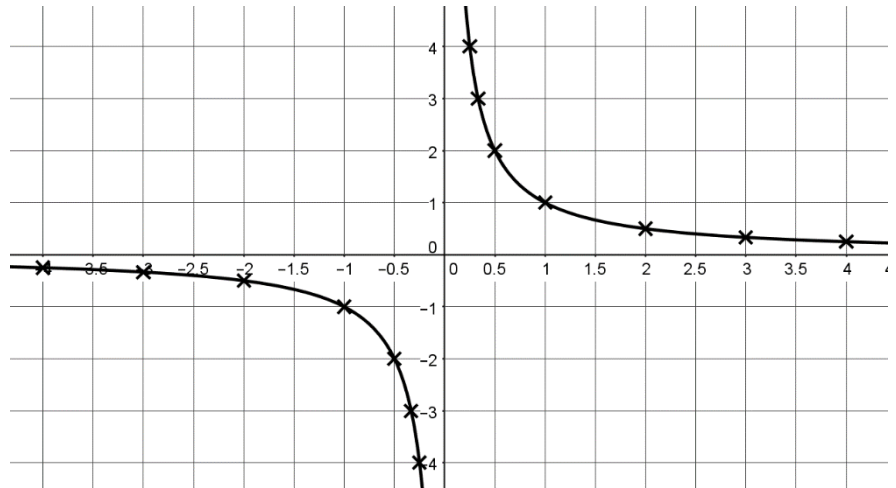
Un tableau de valeur

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4	Non défini	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Une représentation graphique

La représentation graphique est une hyperbole.

Dans un repère orthogonal, la courbe admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



A savoir tracer en moins de 3 minutes sans calculatrice

VI. La fonction racine carrée

Définition

Soit $a \geq 0$. On appelle « **racine carrée de a** », le nombre **positif** dont le carré est a .



Définition



La fonction f telle que $f: x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée **la fonction racine carrée**.

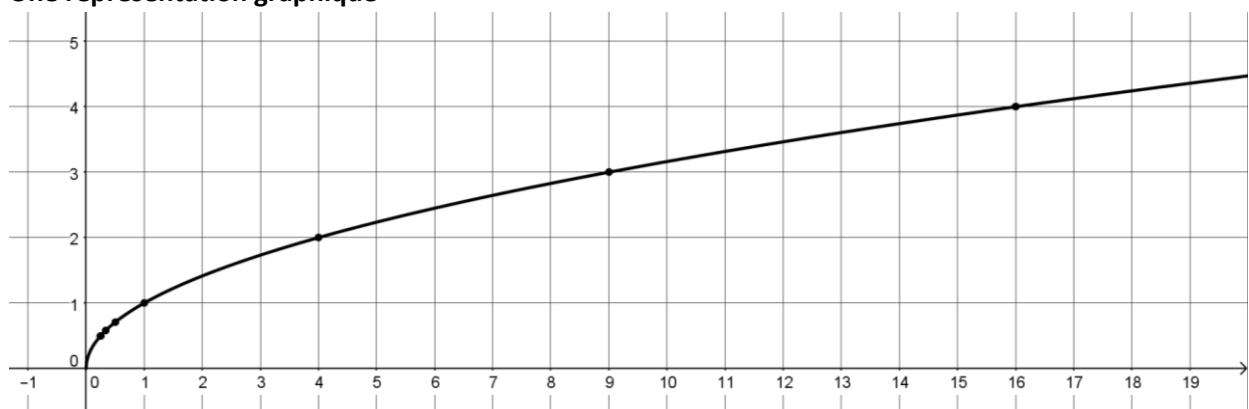
Elle est définie sur $[0; +\infty[$

Un tableau de valeur

x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	16
$f(x)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4

A savoir tracer en moins de 3 minutes sans calculatrice

Une représentation graphique



VI. La fonction cube

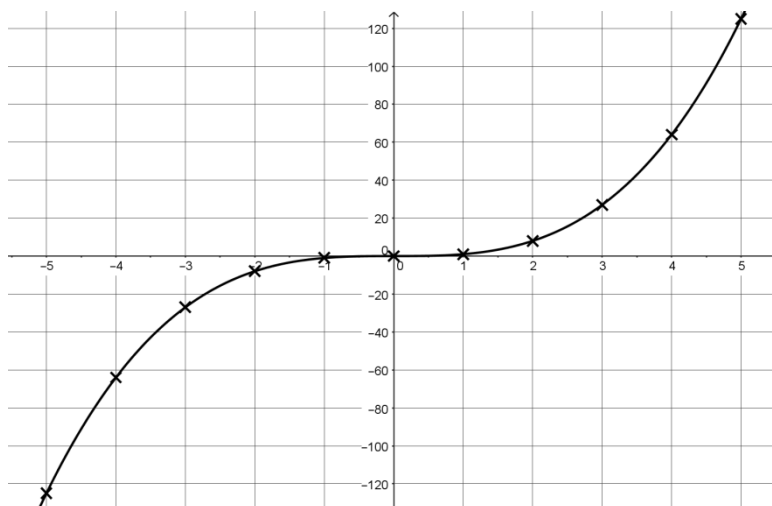


Définition La fonction f telle que $f: x \mapsto x^3$ est appelée **la fonction cube**. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Une représentation graphique

La fonction cube admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

A savoir tracer en moins de 3 minutes sans calculatrice



VII. Lectures graphiques

			Savoir résoudre graphiquement $f(x) = x^2 - 3$ On cherche les points d'intersection des deux courbes. On lit leurs abscisses. $x \in \{-1,7; 1,8\}$ (Valeurs approchées)
Lire les antécédents de -2 par f Sur la courbe représentant f, on cherche les points d'ordonnée -2. On lit leurs abscisses. -2 a deux antécédents : $-8,8$ et $-3,9$ (valeurs approchées)	Résoudre graphiquement $f(x) > 1$ On cherche les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure à 1. On lit leurs abscisses. $x \in]-\infty; -9,4[\cup]0; +\infty[$ Conjecture avec des valeurs approchées	Résoudre graphiquement $f(x) = -3$ On cherche les points de la courbe C_f d'ordonnée -3. On lit leurs abscisses. L'ensemble des solutions est $\{-8,4; -9,4\}$ Ce sont des valeurs approchées.	
Lire graphiquement l'image de -1 par f On cherche le point de la courbe C_f d'abscisse -1. On lit son ordonnée. Ainsi : $f(-1) \approx -0,1$			