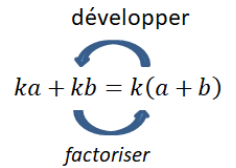


I. Factoriser avec un facteur commun

Méthode du facteur commun

La méthode dite « du facteur commun » consiste à « mettre en commun » une multiplication commune à chaque terme.



Savoir-faire 1 : Savoir factoriser

Les bases

$$A(x) = 7x^2 + 3x$$

$$B(x) = (3x - 5)^2 + 2(3x - 5)(7x + 4)$$

$$C(x) = (4x + 5)(x + 3) - 3(x + 3)(x - 2)$$

Le « coup du 1 » $F(x) = 3x^2 + x$

Le « coup du -1 » $H(x) = (x + 3)(2x - 3) + 3 - 2x$

Gestion du signe – devant les parenthèses

$$D(x) = (7x + 3)(5x - 3) - (4x + 11)(7x + 3)$$

$$E(x) = 2(1 - 9x)^2 - (3x + 2)(1 - 9x)$$

$$G(x) = (x + 2)^2 + x + 2$$

$$I(x) = (7x - 10)^2 - 7x + 10$$

Corrections avec de la couleur, c'est plus facile

$$A(x) = 7x^2 + 3x = 7x \times x + 3 \times x = (7x + 3)x$$

$$\begin{aligned} B(x) &= (3x - 5)(3x - 5) + 2(3x - 5)(7x + 4) = (3x - 5)((3x - 5) + 2(7x + 4)) \\ &= (3x - 5)(3x - 5 + 14x + 8) = (3x - 5)(17x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= (4x + 5) \times (x + 3) - 3 \times (x + 3) \times (x - 2) = ((4x + 5) - 3(x - 2)) \times (x + 3) \\ &= (4x + 5 - 3x + 6)(x + 3) = (x + 11)(x + 3) \end{aligned}$$

$$D(x) = (7x + 3) \times (5x - 3) - (4x + 11) \times (7x + 3) = (7x + 3)((5x - 3) - (4x + 11)) = (7x + 3)(x - 14)$$

$$\begin{aligned} E(x) &= 2(1 - 9x)^2 - (3x + 2)(1 - 9x) = 2(1 - 9x) \times (1 - 9x) - (3x + 2) \times (1 - 9x) \\ &= (2(1 - 9x) - (3x + 2)) \times (1 - 9x) = (2 - 18x - 3x - 2)(1 - 9x) = -21x(1 - 9x) \end{aligned}$$

$$F(x) = 3x^2 + x = 3 \times x \times x + 1 \times x = x(3x + 1)$$

$$\begin{aligned} G(x) &= (x + 2)^2 + x + 2 = (x + 2) \times (x + 2) + 1 \times (x + 2) \\ &= (x + 2) \times ((x + 2) + 1) = (x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

Un « facteur commun » est une multiplication commune : si besoin, il faut faire apparaître cette multiplication :
 $x = 1 \times x$ et $x + 2 = 1 \times (x + 2)$

$$\begin{aligned} H(x) &= (x + 3)(2x - 3) + 3 - 2x = (x + 3)(2x - 3) - 1 \times (2x - 3) \\ &= (x + 3) \times (2x - 3) - 1 \times (2x - 3) = (2x - 3) \times ((x + 3) - 1) \\ &= (x + 3)(x + 2) \end{aligned}$$

$3 - 2x$ et $2x - 3$ sont **opposés** (signes contraires) donc l'un est égal à -1 fois l'autre : $3 - 2x = -1 \times (2x - 3)$
 A la place de $+3 - 2x$ on peut donc écrire $-1 \times (2x - 3)$

$$\begin{aligned} I(x) &= (7x - 10)^2 - 7x + 10 = (7x - 10) \times (7x - 10) - 1 \times (7x - 10) \\ &= (7x - 10) \times ((7x - 10) - 1) = (7x - 10)(7x - 11) \end{aligned}$$

$-7x + 10$ et $7x - 10$ ont tous leurs signes opposés
 donc $-7x + 10 = -1 \times (7x - 10)$

II. Factorisations avec une identité remarquable

Méthode : On recherche à mettre en évidence une des formes : $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$ ou $a^2 - b^2$



Factoriser

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Développer

Factoriser

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Développer

Factoriser

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Développer

Savoir-faire 2 : Savoir factoriser (on pense à s'entraîner « feuille blanche »)

$$J(x) = x^2 + 25 - 10x$$

$$K(t) = 4(t - 5)^2 - (3t + 7)^2$$

$$L(y) = 64y^2 + 80y + 25$$

$$M(x) = -100x^2 + (2x + 1)^2$$

$$N(x) = -11 + 169x^2$$

$$O(x) = 49x^2 - 14\sqrt{3}x + 3$$

Correction

$J(x) = x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2$ $= (x - 5)^2$ forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 5$ donc on utilise $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	$L(y) = (8x)^2 + 2 \times 8x \times 5 + 5^2 = (8y + 5)^2$ on reconnaît $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 8y$ et $b = 5$ donc on peut utiliser $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
Attention : $4(t - 5)^2 = 4 \times (t - 5)^2$ seul $t - 5$ est au carré $K(t) = (2(t - 5))^2 - (3t + 7)^2$ on reconnaît $a^2 - b^2$ avec $a = 2(t - 5)$ et $b = 3t + 7$ donc on utilise la formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $K(t) = (2(t - 5) + (3t + 7))(2(t - 5) - (3t + 7))$	$M(x) = (2x + 1)^2 - (10x)^2$ on reconnaît $a^2 - b^2$ avec $a = 2x + 1$ et $b = 10x$ donc on peut utiliser $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $M(x) = (2x + 1 + 10x)(2x + 1 - 10x)$ $M(x) = (12x + 1)(-8x + 1)$
$N(x) = (13x)^2 - (\sqrt{11})^2$ $= (13x + \sqrt{11})(13x - \sqrt{11})$	$O(x) = (7x)^2 - 2 \times 7x \times \sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = (7x - \sqrt{3})^2$

III. Savoir enchaîner les méthodes (si possible)

Savoir-faire 3 : Savoir factoriser

$$P(x) = 12x^2 - 12x + 3$$

$$Q(x) = 2x^3 - 8x$$

$$R(x) = 7x^3 - 5x^2$$

Savoir-faire 4 : Avec des factorisations partielles (piste rouge)

$$S(x) = (3x + 12)^2 + (x + 4)(11x + 17)$$

$$T(x) = (8x + 22)(1 - 3x) - (4x + 11)(7x + 5)$$

Corrections

1. D'abord la méthode du facteur commun

$$P(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3 \times 4x^2 - 3 \times 4x + 3 \times 1 = 3 \times (4x^2 - 4x + 1)$$

Puis on utilise l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$Q(x) = 3 \times (4x^2 - 4x + 1) = 3 \times ((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2) = 3(2x - 1)^2$$

2. $Q(x) = 2x^3 - 8x = 2x \times x^2 - 2x \times 4 = 2x \times (x^2 - 4) = 2x(x^2 - 2^2) = 2x(x + 2)(x - 2)$

On met $2x$ en facteur commun puis on factorise dans la parenthèse en utilisant $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

3. $R(x) = 7x^3 - 5x^2 = 7 \times x \times x \times x - 5 \times x \times x = (7x - 5) \times x \times x = x^2(7x - 5)$

4. $S(x) = (3x + 12)(3x + 12) + (x + 4)(11x + 17)$

A priori, il n'y a pas de facteur commun, pas d'identité remarquable mais $3x + 12 = 3(x + 4)$

A la place d'un des deux $3x + 12$ on peut écrire $3(x + 4)$: les deux formules donnent toujours le même résultat.

$$S(x) = (3x + 12)(3x + 12) + (x + 4)(11x + 17) = 3(x + 4)(3x + 12) + (x + 4)(11x + 17)$$

Maintenant, $x + 4$ est un facteur commun

$$S(x) = 3(x + 4)(3x + 12) + (x + 4)(11x + 17) = (x + 4)(3(3x + 12) + (11x + 17))$$

$$= (x + 4)(9x + 36 + 11x + 17) = (x + 4)(20x + 53)$$

5. Comme $8x + 22 = 2(4x + 11)$, on peut substituer $2(4x + 11)$ à $8x + 22$

$$T(x) = (8x + 22)(1 - 3x) - (4x + 11)(7x + 5) = 2(4x + 11)(1 - 3x) - (4x + 11)(7x + 5)$$

Maintenant, $4x + 11$ est un facteur commun aux termes : $2(4x + 11)(1 - 3x)$ et $-(4x + 11)(7x + 5)$
 $T(x) = 2(4x + 11)(1 - 3x) - (4x + 11)(7x + 5) = (4x + 11)(2(1 - 3x) - (7x + 5))$
 $= (4x + 11)(2 - 6x - 7x - 5) = (4x + 11)(-13x - 3)$

IV. Equation produit

Théorème du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.



Ce théorème sert à résoudre des équations de degré supérieur à 1

Savoir-faire 5 : Savoir résoudre

u) $x^3 = 16x$

v) $(2x - 3)^2 = (x + 1)^2$

w) $(6x - 7)^2 = (6x - 7)(-3x + 11)$

Corrections

- $x^3 = 16x$
 $x^3 - 16x = 0$
 $x^2 \times x - 16 \times x = 0$
 $x(x^2 - 16) = 0$
 $x \times (x^2 - 4^2) = 0$
 $x(x + 4)(x - 4) = 0$

l'équation est du second degré, on pense au théorème du produit nul
 en ajoutant $-16x$ à chaque membre, on obtient « nul » dans le second membre
 en factorisant le facteur commun x , on va obtenir un produit
 remarque $x^2 - 16$ se factorise encore
 on utilise $a^2 - b^2$

d'après le théorème du produit nul $x = 0$ ou $x + 4 = 0$ ou $x - 4 = 0$
 $x = 0$ ou $x = -4$ ou $x = 4$

L'ensemble des solutions est $\{0; -4; 4\}$

- $(2x - 3)^2 = (x + 1)^2$
 $(2x - 3)^2 - (x + 1)^2 = 0$
 $((2x - 3) + (x + 1))((2x - 3) - (x + 1)) = 0$
 $(3x - 2)(x - 4) = 0$

en ajoutant $-(x + 1)^2$, on obtient 0 dans le second membre
 on factorise avec $a^2 - b^2$ pour obtenir un produit

D'après le théorème du produit nul $3x - 2 = 0$ ou $x - 4 = 0$
 $x = \frac{2}{3}$ ou $x = 4$

L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{2}{3}; 4\right\}$

- $(6x - 7)^2 = (6x - 7)(-3x + 11)$ $\Leftrightarrow (6x - 7)(6x - 7) - (6x - 7)(-3x + 11) = 0$
 $\Leftrightarrow (6x - 7)((6x - 7) - (-3x + 11)) = 0$
 $\Leftrightarrow (6x - 7)(9x - 18) = 0$
 $\Leftrightarrow 6x - 7 = 0$ ou $9x - 18 = 0$

L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{7}{6}; 2\right\}$

Le symbole $\Leftrightarrow$ mis entre deux équations indique qu'elles ont exactement les mêmes solutions.

Il ne doit pas être confondu avec le signe $=$

En effet, on a : $5x + 3 = 9 \Leftrightarrow 5x = 6$ Mais il est faux d'écrire $5x + 3 = 9 = 5x = 6$ puisque $9 \neq 6$

$5x + 3 = 9 \Leftrightarrow 5x = 6$ se lit $5x + 3 = 9$ « est équivalent à » $5x = 6$

Piste noire : pourquoi $x^2 + 1$ ne se factorise pas en produit de facteurs du premier degré ?

Si on pouvait factoriser, on aurait : $x^2 + 1 = (\text{un nombre non nul} \times x + \dots) \times (\text{un nombre non nul} \times x + \dots)$

D'après le théorème du produit nul, l'équation $x^2 + 1 = 0$ aurait des solutions

C'est impossible puisque $x^2 + 1 \geq 1$!!!

Supposer que $x^2 + 1$ se factorise conduit à une contradiction, cette hypothèse doit être rejetée

Donc $x^2 + 1$ ne se factorise pas

Pour que cela soit possible, il faudrait savoir résoudre l'équation $x^2 = -1$ ou ce qui revient au même que $\sqrt{-1}$ existe (mais ce ne peut pas être un réel) ... pour cela, rendez-vous en spécialité de terminale pour construire de « nouveaux nombres » et factoriser $x^2 + 1$...