

Chapitre 7 : Résolution par substitution d'un système linéaire

Savoir tester des solutions d'une équation :

On considère l'équation $x + 2y = 50$. Les couples suivants sont-ils solution ?

- (21 ; 8) qui veut dire $x = 21$ et $y = 8$
- (8 ; 21) qui veut dire $x = 8$ et $y = 21$

Ex 1 : Savoir trouver des solutions d'une équation

On considère l'équation $x + 2y = 10$.

- 1) Donner deux solutions de l'équation
- 2) Trouver y pour que $\left(\frac{2}{3}; y\right)$ soit solution
- 3) Trouver x pour que $(x; \sqrt{7})$ soit solution
- 4) Combien de solutions l'équation a-t-elle ? argumenter !

Notion de système d'équations

On considère le système d'équations
$$\begin{cases} 5x - 9y = -3 \\ -x + 7y = 11 \end{cases}$$

La première équation $5x - 9y = -3$ a une infinité de solutions

La seconde équation $-x + 7y = 11$ a une infinité de solutions

Résoudre le système c'est trouver les solutions **communes** aux deux équations.

Ex 2 : Savoir tester si un couple est solution d'un système

Parmi les couples (1 ; 2) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ (17 ; 4) (3 ; 2) lesquels sont solutions du système précédent ?

Ex 3 : Savoir écrire en fonction de ...

On considère le système
$$\begin{cases} 5x - 9y = -3 \\ x + 7y = 11 \end{cases}$$

- 1) A partir de la première équation, écrire y en fonction de x
- 2) A partir de la première équation, écrire x en fonction de y
- 3) A partir de la seconde équation, écrire y en fonction de x
- 4) A partir de la seconde équation, écrire x en fonction de y
- 5) Quelle est la formule la plus simple parmi les quatre réponses précédentes ? Aurait-on pu le prévoir ?

Principe de la méthode de résolution par substitution

- On suppose dans un premier temps que $(x; y)$ est une solution
 - A partir d'une des équations (celles que l'on veut), on exprime une inconnue (celle que l'on veut) en fonction de l'autre.
 - On remplace l'inconnue choisie par l'expression trouvée dans l'autre équation
 - On a obtenu une équation avec une seule inconnue que l'on résout
 - Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de l'autre inconnue
- Il reste à établir la réciproque. En remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées dans chacune des deux équations, on vérifie que les deux égalités sont vraies. *La méthode se généralise à 3 équations à 3 inconnues, 4 équations à 4 inconnues, ...*

Un exemple rédigé

Résoudre le système
$$\begin{cases} 2x - 3y = -9 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$$

- On suppose que $(x ; y)$ est une solution. On exprime x en fonction de y dans la seconde équation

$$x + 5y = 10 \quad \text{en ajoutant } -5y \text{ à chaque membre}$$

$$x = 10 - 5y$$

Dans la première équation on remplace x par $10 - 5y$

$$2(10 - 5y) - 3y = -9$$

$$20 - 10y - 3y = -9 \quad \text{en ajoutant } -20 \text{ à chaque membre}$$

$$-13y = -9 - 20 \quad \text{en divisant par } -13 \text{ à chaque membre}$$

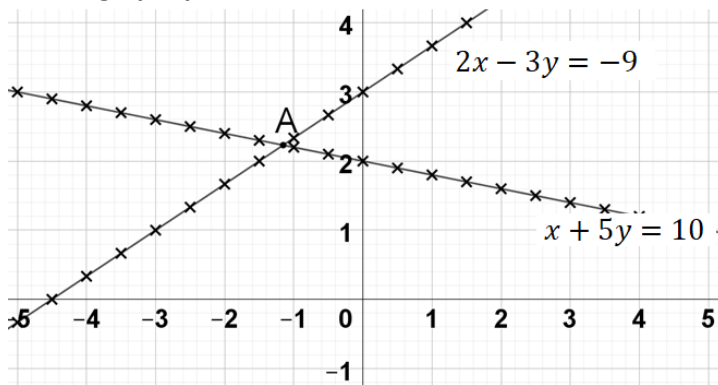
$$y = \frac{-29}{-13} = \frac{29}{13}$$

En remplaçant y par $\frac{29}{13}$ dans $x = 10 - 5y$

$$x = 10 - 5 \times \frac{29}{13} = -\frac{15}{13}$$

- Réciproquement
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \times \frac{-15}{13} - 3 \times \frac{29}{13} = -9 \\ x + 7y = \frac{-15}{13} + 5 \times \frac{29}{13} = 10 \end{cases}$$
- Le système a une unique solution $\left(-\frac{15}{13} ; \frac{29}{13}\right)$

Résolution graphique



On représente chacune des solutions de l'équation $2x - 3y = -9$ par un point ... l'ensemble de tous ces points forment une droite

On représente chacune des solutions de l'équation $x + 5y = 10$ par un point ... l'ensemble de tous ces points forment une droite

On cherche le point d'intersection et on lit les coordonnées de ce point. On obtient une valeur approchée de la solution du système (si elle existe).

A propos de la mise en équation

Il est conseillé de suivre une démarche en 3 étapes :

- Modélisation du problème dans un cadre mathématique familier
- Traitements mathématiques
- Interprétation des résultats dans la situation

Pour la modélisation dans le cadre des équations, il n'y a pas de « recette miracle ». On peut s'attacher à :

- Bien identifier les grandeurs en jeu.
Ursule dit à Totor : « J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 99 ans »
Dans cet énoncé, il y en a au moins 7 grandeurs en jeu: les âges d'Ursule et Totor aujourd'hui, leurs âges avant (quand Ursule avait l'âge de Totor), leurs âges et la somme dans le futur (quand Totor aura l'âge d'Ursule).
- Nommer quelques grandeurs (préciser les unités si nécessaire) , exprimer les autres en fonction des lettres choisies pour obtenir des relations.
Attention à la précision... soit x les pommes ne veut rien dire ! De quoi parle-t-on ? de leur poids en grammes, de leur poids en kilogramme, de leur diamètre, du nombre de pommes, du prix de vente au kilo en euros (en roubles ? en dollars ?) ...
Pour obtenir une relation, il est particulièrement fructueux de réussir à exprimer une même grandeur de deux manières différentes.

Pour l'interprétation des résultats bien tenir compte des contraintes liées à la situation

- Des longueurs ne peuvent pas être négatives, un nombre d'objets ne peut pas être $\frac{5}{3}$, quand on donne un prix en euros on ne dit pas $\frac{11}{7}$ € mais environ 1,57 €, ... Par contre, un bénéfice peut être négatif, il s'agit alors d'une perte !
- Parfois, il faut éliminer des résultats qui ne correspondent pas à la situation (en justifiant).

Résoudre un système de 3 équations avec 3 inconnues

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y - z = 50 \\ x + y + z = 10 \\ -x + 3y + 10z = 15 \end{cases}$$

- Condition nécessaire (que doivent **nécessairement** vérifier x, y et z pour former une solution du système ?)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x + 2y - z = 50 \\ x = 10 - y - z \\ -x + 3y + 10z = 15 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 3(\mathbf{10 - y - z}) + 2y - z = 50 \\ x = 10 - y - z \\ -(\mathbf{10 - y - z}) + 3y + 10z = 15 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 30 - 3y - 3z + 2y - z = 50 \\ x = 10 - y - z \\ -10 + y + z + 3y + 10z = 15 \end{cases} \\ &\text{donc } \begin{cases} 30 - y - 4z = 50 \\ x = 10 - y - z \\ 4y + 11z - 10 = 15 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} -y = 50 + 4z - 30 \\ x = 10 - y - z \\ 4y + 11z - 10 = 15 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y = \frac{4z+20}{-1} = \mathbf{-4z - 20} \\ x = 10 - y - z \\ 4y + 11z = +10 + 15 \end{cases} \\ &\text{donc } \begin{cases} y = \mathbf{-4z - 20} \\ x = 10 - y - z \\ 4y + 4(\mathbf{-4z - 20}) + 11z = 15 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y = -4z - 20 \\ x = 10 - y - z \\ -16z - 80 + 11z - 10 = 15 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y = -4z - 20 \\ x = 10 - y - z \\ -5z = 105 \end{cases} \\ &\text{donc } \begin{cases} y = -4z - 20 \\ x = 10 - y - z \\ z = \frac{105}{-5} = -21 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y = -4z - 20 \\ x = 10 - y - z \\ z = \mathbf{-21} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y = -4(\mathbf{-21}) - 20 = 64 \\ x = 10 - y - z \\ z = -21 \end{cases} \\ &\text{donc } \begin{cases} y = 64 \\ x = 10 - y - z = 10 - 64 - (-21) = -33 \\ z = -21 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc si $(x ; y ; z)$ est une solution du système alors nécessairement $x = -33$; $y = 64$; $z = -21$
Dit autrement, la seule solution possible est $(-33 ; 64 ; -21)$ mais reste à montrer que c'est bien une solution.

- Condition suffisante (réciproquement, $x = -33$; $y = 64$; $z = -21$ forment-ils bien une solution du système ?)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x + 2y - z = 3(-33) + 2(64) - (-21) = 50 \\ x + y + z = (-33) + 64 + (-21) = 10 \\ -x + 3y + 10z = -(-33) + 3(64) + 10(-21) = 15 \end{cases} \begin{array}{l} \text{première égalité vérifiée} \\ \text{seconde égalité vérifiée} \\ \text{troisième égalité vérifiée} \end{array} \end{aligned}$$

Le système a donc une unique solution $(-33 ; 64 ; -21)$

Mais pourquoi « s'embêter » avec la réciproque ?

Quand on résout des équations :

- Soit on raisonne par équivalences en s'appuyant sur des règles qui garantissent que les transformations conservent exactement les mêmes solutions. Par exemple : « *en multipliant chaque membre par un même nombre non nul, on obtient une autre équation qui a exactement les mêmes solutions* »
- Soit on raisonne par déductions « *on a telle équation donc en en déduit donc ...* » mais dans ce cas la réciproque n'est pas assurée et doit être explicitement vérifiée.

Exercice : Voici un exercice donné par l'enseignant : « résoudre $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$ »

Voici la copie d'Ursule :

Soit x une solution

donc l'égalité $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$ est vérifiée.

donc en élevant au carré chaque membre, on obtient une autre égalité $x - 1 = 2x$

donc $x - 2x = 1$

donc $-x = 1$

donc $x = \frac{1}{-1} = -1$

- Démontrer que -1 n'est pas une solution de l'équation
- A quelle étape, Ursule a-t-il fait une erreur ?

Correction savoir tester des solutions d'une équation

- $x + 2y = 21 + 2 \times 8 = 37 \neq 50$ donc $(21 ; 8)$ n'est pas une solution du système.
- $x + 2y = 8 + 2 \times 21 = 50$ donc $(8 ; 21)$ est une solution du système

Correction Exercice 1

1) $x = 85$ donc $85 + 2y = 10$ donc $2y = 10 - 85$ donc $y = -\frac{75}{2}$

une solution est $x = 85$ et $y = -\frac{75}{2}$

$x = 0$ donc $0 + 2y = 10$ donc $y = 5$ une autre solution est $x = 0$ et $y = 5$ qu'on peut noter $(0 ; 5)$

2) Pour $x = \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} + 2y = 10$ donc $2y = 10 - \frac{2}{3}$ donc $2y = \frac{28}{3}$ donc $y = \frac{28}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{14}{3}$

La solution obtenue est $(\frac{2}{3} ; \frac{14}{3})$

3) $x + 2 \times \sqrt{7} = 10$ donc $x = 10 - 2\sqrt{7}$

La solution est $(10 - 2\sqrt{7} ; \sqrt{7})$

4) L'équation a une infinité de solution car chaque fois qu'on fixe une valeur pour x , on peut trouver la valeur de y correspondante

Correction exercice 2

• $5x - 9y = 5 \times 1 - 9 \times 2 = -13$ la première égalité n'est pas vérifiée donc $(1 ; 2)$ n'est pas une solution

• $5x - 9y = 5 \times 0 - 9 \times \frac{1}{3} = -3$

$-x + 7y = -0 + 7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \neq 11$ la seconde égalité n'est pas vérifiée donc $(0 ; \frac{1}{3})$ n'est pas une solution

• $5x - 9y = 5 \times 17 - 9 \times 4 \neq -3$ la première égalité n'est pas vérifiée donc $(17 ; 4)$ n'est pas une solution

• $5x - 9y = 5 \times 3 - 9 \times 2 = -3$

$-x + 7y = -3 + 7 \times 2 = 11$

les deux égalités sont vérifiées donc $(3 ; 2)$ est une solution du système.

Correction exercice 3

1) $5x - 9y = -3$ donc $-9y = -3 - 5x$ donc $y = \frac{-3-5x}{-9} = -\frac{3}{-9} - \frac{5x}{-9} = \frac{1}{3} + \frac{5}{9}x$

2) $5x = -3 + 9y$ donc $x = -\frac{3}{5} + \frac{9}{5}y$

3) $7y = 11 - x$ donc $y = \frac{11-x}{7}$

4) $x = 11 - 7y$

5) Dans la deuxième équation, le coefficient de x est 1 ... donc on pourra écrire $x = \dots$ sans faire de division !

Correction pourquoi « s'embêter » avec la réciproque

a) En remplaçant x par -1 , dans le premier membre, on obtiendrait $\sqrt{-2}$ nombre qui n'existe pas (et de même dans le second membre).

Donc -1 n'est pas une solution.

b) Toutes les déductions d'Ursule sont justes. Il a démontré correctement que : « *si x est une solution alors $x = -1$* ».

Mais pour pouvoir affirmer que -1 est solution, puisqu'il n'a pas raisonné avec des règles dont l'application permet d'être certain que les équations écrites sont bien équivalentes (ont bien les mêmes solutions), **Ursule devait obligatoirement démontrer la réciproque.**

Celle-ci étant fausse : -1 n'est pas solution de l'équation.

En examinant de plus près la copie d'Ursule, on remarque qu'il a utilisé une règle dont la réciproque est fausse :

- « *si deux nombres sont égaux alors leurs carrés sont égaux* » règle mise en œuvre par Ursule est vraie
- La réciproque « *si $a^2 = b^2$ alors $a = b$* » est fausse. Contre-exemple : $a = -3$ et $b = 3$

A retenir : « élever chaque membre d'une équation au carré, ne garantit pas d'obtenir une équation ayant exactement les mêmes solutions (en général, ce n'est pas le cas) » ... la réciproque doit être vérifiée.