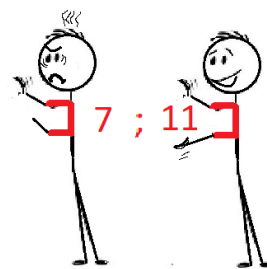


Chapitre 4 : Résolution d'inéquations du premier degré

I. Intervalles (savoir verbaliser)

- $[-2 ; 6[$ est l'ensemble des réels compris entre -2 (inclus) et 6 (exclu)
 $] 7 ; 11]$ est l'ensemble des réels compris entre 7 (exclu) et 11 (inclus)
 $] -\infty ; 8]$ est l'ensemble des réels inférieurs **ou égaux** à 8
 $] 7 ; +\infty[$ est l'ensemble des réels **strictement** supérieur à 7



II. Inéquations du premier degré

Savoir tester si un nombre est solution d'une inéquation

Parmi les nombres $2 ; 0 ; -\frac{1}{2}$

- a) lesquels sont solutions de l'inéquation $x^4 + 1 \geq 2 - (x + 1)^3$
 b) lesquels sont solutions de l'inéquation $x^4 + 1 > 2 - (x + 1)^3$

Correction

- pour $x = 2$

d'une part, $x^4 + 1 = 2^4 + 1 = 17$
 d'autre part $2 - (x + 1)^3 = 2 - (2 + 1)^3 = 2 - 27 = -25$
 a) Comme on a bien $17 \geq -25$, le nombre 2 est une solution de $x^4 + 1 \geq 2 - (x + 1)^3$
 b) Comme on a bien $17 > -25$, le nombre 2 est une solution de $x^4 + 1 > 2 - (x + 1)^3$
- pour $x = -\frac{1}{2}$

d'une part, $x^4 + 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 1 = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16} \approx 1,06$
 d'autre part $2 - (x + 1)^3 = 2 - \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^3 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \approx 1,8$
 a) On **n'a pas** $\frac{17}{16} \geq \frac{15}{8}$, le nombre $-\frac{1}{2}$ **n'est pas** une solution de $x^4 + 1 \geq 2 - (x + 1)^3$
 b) On **n'a pas** $\frac{17}{16} > \frac{15}{8}$, le nombre $-\frac{1}{2}$ **n'est pas** une solution de $x^4 + 1 > 2 - (x + 1)^3$
- pour $x = 0$

d'une part, $x^4 + 1 = 0^4 + 1 = 1$
 d'autre part $2 - (x + 1)^3 = 2 - (0 + 1)^3 = 1$
 a) Comme on a bien $1 \geq 1$, le nombre 0 est une solution de $x^4 + 1 \geq 2 - (x + 1)^3$
 b) On **n'a pas** $1 > 1$, le nombre 0 **n'est pas** une solution de $x^4 + 1 > 2 - (x + 1)^3$

Ecrire des inéquations équivalentes (des inéquations qui ont exactement les mêmes solutions)

Lorsqu'on ajoute ou soustrait un même nombre à chaque membre d'une inéquation, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions.



Lorsqu'on multiplie ou divise chaque membre d'une inéquation, par un même nombre **positif non nul**, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions en gardant le sens de l'inégalité.

Lorsqu'on multiplie ou divise chaque membre d'une inéquation, par un même nombre **négatif non nul**, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions **en changeant le sens** de l'inégalité.

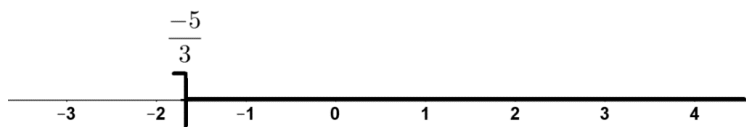
Savoir résoudre une inéquation du premier degré. Représenter et donner l'ensemble des solutions.

- a) $5x + 1 > 2x - 4$ b) $-2x - 7 \leq 3x + 2$

Correction

- a) $5x + 1 > 2x - 4$ en ajoutant $-1 - 2x$ à chaque membre, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions (le sens de l'inégalité ne change jamais en ajoutant ou en soustrayant)
 $5x - 2x > -4 - 1$
 $3x > -5$ en divisant chaque membre par 3 qui est **positif** non nul, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions en **gardant** le sens de l'inégalité
 $\frac{3x}{3} > -\frac{5}{3}$
 $x > -\frac{5}{3}$

L'ensemble des solutions est $] -\frac{5}{3} ; +\infty[$



Savoir donner interprétation : $5x + 1 > 2x - 4$ si et seulement si $x > -\frac{5}{3}$

- Pour $x > -\frac{5}{3}$ le résultat de la formule $5x + 1$ est plus **grand** que celui de la formule $2x - 4$
- Pour $x = -\frac{5}{3}$ le résultat de la formule $5x + 1$ est **égal** à celui de la formule $2x - 4$
- Pour $x < -\frac{5}{3}$ le résultat de la formule $5x + 1$ est plus **petit** que celui de la formule $2x - 4$

b) $-2x - 2 \leq 3x - 7$ en ajoutant $-3x + 2$ à chaque membre, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solutions (le sens de l'inégalité ne change jamais en ajoutant ou en soustrayant)

$$-2x - 3x \leq 2 - 7$$

$$-5x \leq -5$$

en divisant chaque membre par -5 qui est **négatif** non nul, non nul, on obtient une autre inéquation ayant exactement les mêmes solution en **inversant** le sens de l'inégalité

$$-\frac{5x}{-5} \geq \frac{-5}{-5}$$

$$x \geq 1$$

Donc $x \in [1; +\infty[$

Savoir donner interprétation : $-2x - 2 \leq 3x - 7$ si et seulement si $x \geq 1$

- Pour $x > 1$ le résultat de la formule $-2x - 2$ est plus **petit** que celui de la formule $3x - 7$
- Pour $x = 1$ le résultat de la formule $-2x - 2$ est **égal** à celui de la formule $3x - 7$
- Pour $x < 1$ le résultat de la formule $-2x - 2$ est plus **grand** que celui de la formule $3x - 7$

III. Savoir étudier le signe d'une expression

Notation Le symbole $\Leftrightarrow$ mis entre deux inéquations signifie qu'elles ont exactement les mêmes solutions.
Ne pas confondre avec $=$ entre des formules qui signifie que les formules donnent le même résultat

On a : $A(x) = 2x + 4 = 2(x + 2)$ mais $2x + 4 \Leftrightarrow 2(x + 2)$ n'a pas de sens
 $\frac{2x}{7} = 5x \Leftrightarrow 2x = 35x$ mais $\frac{2x}{7} = 5x = 2x = 35x$ est faux car les quatre formules ne donnent pas toujours le même résultat.

Savoir étudier le signe de $A(x) = -2x + 7$

- $A(x)$ de signe + ?
 $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 7 \geq 0$ en soustrayant 7 à chaque membre
 $\Leftrightarrow -2x \geq -7$
 $\Leftrightarrow x \leq \frac{-7}{-2}$ en divisant chaque membre par -2 qui est **négatif**
 $\Leftrightarrow x \leq \frac{7}{2}$

- $A(x)$ de signe - ? $A(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{2}$ (on l'a directement avec le paragraphe précédent)

Savoir interpréter :

Si $x < \frac{7}{2}$	alors	le résultat de la formule $-2x + 7$ est strictement positif
Si $x = \frac{7}{2}$	alors	le résultat de la formule $-2x + 7$ est 0
Si $x > \frac{7}{2}$	alors	le résultat de la formule $-2x + 7$ est strictement négatif

Savoir dresser le tableau de signes: on retrouve verticalement les 3 cas de l'interprétation (le texte gris est absent de la réponse finale)

Valeurs de x	$-\infty$	pour $x < \frac{7}{2}$	pour $x = \frac{7}{2}$	pour $x > \frac{7}{2}$	$+\infty$
Signe de $-2x + 7$		$-2x + 7$ est de signe +	$-2x + 7$ vaut 0	$-2x + 7$ est de signe -	

Savoir étudier le signe de $B(x) = 3x + 17$

- $B(x)$ de signe + ?

$$B(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x + 17 \geq 0 \quad \text{en ajoutant } -17 \text{ à chaque membre}$$

$$\Leftrightarrow 3x \geq -17$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{17}{3} \quad \text{en divisant chaque membre par 3 qui est positif}$$

- $B(x)$ de signe - $\Leftrightarrow x \leq -\frac{17}{3}$

Savoir interpréter :

Si $x > -\frac{17}{3}$ alors le résultat de la formule $3x + 17$ est strictement positif

Si $x = -\frac{17}{3}$ alors le résultat de la formule $3x + 17$ est 0

Si $x < -\frac{17}{3}$ alors le résultat de la formule $3x + 17$ est strictement négatif

Savoir dresser le tableau de signes: on retrouve verticalement les 3 cas de l'interprétation (le texte gris est absent de la réponse finale)

Valeurs de x	$-\infty$	pour $x < -\frac{17}{3}$	pour $x = -\frac{17}{3}$	pour $x > -\frac{17}{3}$	$+\infty$
Signe de $3x + 17$		$3x + 17$ est de signe $-$	$3x + 17$ vaut 0	$3x + 17$ est de signe $+$	

IV. Savoir travailler avec des inégalités

Règles pour travailler avec des inégalités

En ajoutant ou soustrayant un même nombre à chaque membre d'une inégalité, on obtient une autre inégalité (sens conservé)

Lorsqu'on multiplie ou divise chaque membre d'une inégalité, par un même nombre **strictement positif**, on obtient une autre inégalité (en **conservant** le sens)

Lorsqu'on multiplie ou divise chaque membre d'une inégalité, par un même nombre **strictement négatif**, on obtient une autre inégalité en **inversant le sens**.



Lorsqu'on **ajoute** membre à membre deux inégalités de **même sens**, on obtient une inégalité de même sens.

Attention, on ne soustrait pas membre à membre : on se ramène à une addition car « soustraire un nombre revient à ajouter son opposé ».

Savoir encadrer

On sait que : $2 \leq a \leq 10$ et $-5 \leq b \leq 7$

Encadrer a) $-2a$ b) $2a + 3b$ c) $-a + b$

Correction

a) $2 \leq a \leq 10$
 $-4 \geq -2a \geq -20$ $\times (-2)$ **négatif** donc on **inverse** le sens des inégalités

b) $2 \leq a \leq 10$
 $4 \leq 2a \leq 20$ $\times 2$ **positif** donc on **garde** le sens des inégalités

$-5 \leq b \leq 7$
 $-15 \leq 3b \leq 21$ $\times 3$ **positif** donc on **garde** le sens des inégalités

Ainsi : $4 \leq 2a \leq 20$

$-15 \leq 3b \leq 21$

En ajoutant des inégalités de même sens

$-11 \leq 2a + 3b \leq 41$

c) $2 \leq a \leq 10$
 $-2 \geq -a \geq -10$ $\times (-1)$ **négatif** donc on **inverse** le sens des inégalités

Ainsi : $-5 \leq b \leq 7$

$-10 \leq -a \leq -2$ On lit l'inégalité précédente de « droite à gauche » pour avoir des inégalités de **même sens**

En ajoutant, membre à membre, des inégalités de **même sens**

$-15 \leq b - a \leq 5$ Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé $b - a = b + (-a)$