

Micro-chapitre : Règle des priorités – Identités remarquables

I. Définitions

Puissances d'un réel

Soit a un réel non nul et n entier strictement positif :

- $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ avec n facteurs



- $a^0 = 10^0 = 1$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Exemples : $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$ $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$...

- $10^n = 100 \dots 0$ avec n zéros

- $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,00 \dots 1$ avec n chiffres après la virgule

Vocabulaire

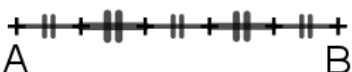
- Le résultat d'une suite d'addition et soustraction s'appelle une **somme algébrique**.
Par abus de langage, on dit parfois simplement somme. Quand on il n'y a qu'une seule soustraction, on parle de différence. Les morceaux d'une somme (ou d'une différence) s'appelle les **termes**.
- Le résultat d'une multiplication s'appelle un **produit**. Les « morceaux » s'appellent les **facteurs**.
- Le résultat d'une division s'appelle un **quotient**.



Segment de longueur 1



On partage en trois segments de longueur $\frac{1}{3}$



On reporte 5 fois un petit de segment. [AB] a pour longueur $\frac{5}{3}$.

Dans le quotient $\frac{5}{3}$, 5 s'appelle le **numérateur** et 3 le **dénominateur**.

II. Règle des priorités

Règle des priorités

En l'absence de parenthèses, on commence par calculer :



- les puissances et les racines carrées qui ont la même priorité
- les multiplications et divisions qui ont la même priorité
- les additions et soustractions qui ont la même priorité

Les parenthèses servent à modifier les priorités.

On remarquera que ce qu'on effectue en dernier, ce sont les additions et soustractions non entre parenthèses.

Quelques exemples d'utilisation de la règle des priorités

- $10x^2$ est l'écriture abrégée de $10 \times x^2$

Comme le carré est prioritaire sur la multiplication, seul le x est au carré (le 10 ne l'est pas !)

Ne pas confondre : $10x^2 = 10 \times x \times x$ et $(10x)^2 = 10 \times x \times 10 \times x$

- L'expression $(2x - 4)^2 + (x + 5)(2x - 4) - 3(2x - 4)$ contient trois termes puisque les termes sont séparés par les + et - non entre parenthèses (règle des priorités). Les trois termes sont :

$$(2x - 4) \times (2x - 4) \quad + (x + 5) \times (2x - 4) \quad + 3 \times (2x - 4)$$

On remarque que $\times (2x - 4)$ est une multiplication commune à chaque terme : c'est un **facteur commun**.

- $2x + 3x(x - 1)$ est l'écriture abrégée de $2 \times x + 3x \times (x - 1)$

Pour développer, il faut commencer par la multiplication, $3x \times (x - 1)$ avant l'addition

$$2x + 3x(x - 1) = 2x + 3x^2 - 3x = 3x^2 - x$$

$$-9x^2 + 6 = (-9x^2) + 6 = 6 + (-9x^2) = 6 - 9x^2$$

Dans une somme algébrique (suite d'additions et soustractions), l'ordre n'a pas d'importance à condition de bien conserver le signe devant chaque terme.

- $(9x + 7) \times \frac{x-8}{11} = \frac{(9x+7) \times (x-8)}{11} = \frac{9x+7}{11} \times (x-8)$

D'après la règle des priorités, la multiplication et la division ont la même priorité

- $\frac{9^2}{4} = \frac{9 \times 9}{4} = \frac{81}{4}$ car pour le calcul de $\frac{9^2}{4}$ le carré est prioritaire sur la division

Ne pas confondre avec $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} = \frac{81}{16}$. Les parenthèses sont indispensables pour indiquer la priorité à la division. Ainsi pour calculer x^2 pour x valant $\frac{9}{4}$, on remplace x par $\left(\frac{9}{4}\right)$ en mettant bien les parenthèses.

La substitution

Substituer veut dire « mettre une chose » à la place d'une autre.

En mathématiques, on utilise la substitution pour remplacer un objet mathématique par un autre qui lui est égal. **Pour respecter la règle des priorités, il est conseillé de mettre des parenthèses !**

Exemple : calculer x^2 pour $x = -14$ on écrit $x^2 = (-14)^2$

Remarque : $(-14)^2 = (-14) \times (-14) = 196$ tandis que $-14^2 = -1 \times 14^2 = -1 \times 14 \times 14 = -196$
Pas encore convaincu que $-14^2 = -196$? Et pourtant $-14^2 = 0 - 14^2 = 0 - 196 = -196$

Savoir calculer l'image d'un réel par une fonction

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 - 3x$. Calculer $g(-7)$; $g(3\sqrt{5})$ et $g(3 - \sqrt{5})$

Réponse : $g(-7) = -(-7)^2 - 3(-7) = -(49) + 21 = -28$

$$g(3\sqrt{5}) = -(3\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{5}) = -3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} - 3\sqrt{5} = -3 \times 5 - 3\sqrt{5} = -15 - 3\sqrt{5}$$

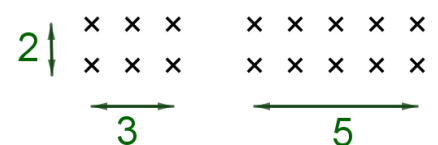
$$\begin{aligned} g(3 - \sqrt{5}) &= -(3 - \sqrt{5})^2 - (3 - \sqrt{5}) = -1 \times (3 - \sqrt{5}) \times (3 - \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) \\ &= -1 \times (9 - 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5) - (3 - \sqrt{5}) = -9 + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5 - 3 + \sqrt{5} \\ &= -17 + 7\sqrt{5} \end{aligned}$$

III. Factorisation avec la méthode du facteur commun

Pour compter les croix, on peut au choix :

- Considérer qu'il n'y a qu'un seul paquet. Il y a $2 \times (3 + 5)$ croix.
- Compter dans chaque paquet 2×3 et 2×5 puis additionner

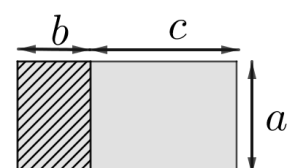
On a bien : $2 \times 3 + 2 \times 5 = 2 \times (3 + 5)$



Pour calculer l'aire du grand rectangle

- On peut calculer l'aire de chaque petit rectangle $a \times b$ et $a \times c$
Puis additionner $a \times b + a \times c$
- On peut aussi d'abord calculer la longueur du grand rectangle $b + c$
L'aire du grand rectangle est aussi $a \times (b + c)$

Ainsi $a \times b + a \times c = a \times (b + c)$





Pour tous les nombres a, b, c on a : $a \times b + a \times c = a \times (b + c)$

Cela revient à pouvoir changer l'ordre de calcul des multiplications et additions dans le cas d'un **facteur commun**.

- $a \times b + a \times c$ d'après la règle des priorités, on calcule d'abord les multiplications puis l'addition
- $a \times (b + c)$ on calcule l'addition puis la multiplication

Savoir-faire et savoir expliquer

1. Calculer $2023 - 2023 \times 101 = 1 \times 2023 - 2023 \times 101 = (1 - 101) \times 2023 = -202\,300$
2. Simplifier si possible $2x^3 \times x^2 = 2 \times x \times x \times x \times x \times x = 2x^5$
3. Simplifier si possible $(3x^3)^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x \times x \times \dots \times x \times x \times x \times x = 81x^{12}$
(Pour les x , on en compte 4 paquets de 3 soit 12 au total)
4. Simplifier si possible $-7x^3 - 2x^2 = -7 \times x \times x \times x - 2 \times x \times x$ non simplifiable
d'après la règle des priorités, il faudrait commencer par effectuer les multiplications avant la somme algébrique mais on ne peut pas faire ces multiplications ...
5. Simplifier si possible $7x^4 - 11x^4 = 7 \times x^4 - 11 \times x^4 = (7 - 11) \times x^4 = -4x^4$
6. Simplifier si possible $8\sqrt{13} - 3\sqrt{13} = 8 \times \sqrt{13} - 3 \times \sqrt{13} = (8 - 3) \times \sqrt{13} = 5\sqrt{13}$

IV. Savoir prouver une égalité

Une méthode très classique consiste à faire deux calculs séparés sur chacun des membres pour aboutir à la même expression.

Exemple : Prouver que, pour tout réel x , $2(3x - 5)^2 - 8 = 6(3x - 7)(x - 1)$

- A gauche du signe égal
 $2(3x - 5)^2 - 8 = 2(3x - 5)(3x - 5) - 8 = 2(9x^2 - 15x - 15x + 25) - 8$
 $= 18x^2 - 30x - 30x + 50 - 8 = 18x^2 - 60x + 42$
- A droite du signe égal
 $6(3x - 7)(x - 1) = 6(3x^2 - 3x - 7x + 7) = 18x^2 - 18x - 42x + 42 = 18x^2 - 60x + 42$

On a bien l'égalité : on dispose maintenant de deux trois formules qui donnent exactement les mêmes résultats : $2(3x - 5)^2$ et $6(3x - 7)(x - 1)$ et $18x^2 - 60x + 42$.

V. Identités remarquables

Apprendre par cœur ces trois identités remarquables

Pour tous les réels a et b

$$\begin{array}{c} \text{Factoriser} \\ \downarrow \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ \uparrow \\ \text{Développer} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Factoriser} \\ \downarrow \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \\ \uparrow \\ \text{Développer} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Factoriser} \\ \downarrow \\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\ \uparrow \\ \text{Développer} \end{array}$$

Savoir faire les preuves

$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$
---	---	---

$$= a^2 - 2ab + b^2$$