

Chapitre 5 : Notions de vecteur

Ce cours est à lire à plusieurs niveaux indiqués par les codes couleurs:

-  Piste verte pour tout le monde
-  Piste bleue pour ceux qui se débrouille bien (obligatoire pour tous ceux qui prennent « spé math »)
-  Piste rouge ... pour ceux qui prennent *spécialité mathématiques* en première (et qui n'ont pas de retard)
-  Piste noire ... pour les futurs *spécialistes mathématiques* et qui visent des études post-bac avec un bon niveau

Une signalétique, reprenant le code couleur, vous aide à vous mettre en perspective d'utilisation du cours :



Désigne une définition ou une propriété ou un théorème ou une formule ... à **savoir par-cœur**



Désigne un savoir-faire indispensable ! Il est conseillé de **savoir le faire « feuille blanche »**.



Démonstration : Quelles sont les hypothèses, les enchainements, la conclusion ? Quelle est la logique suivie ? Qu'a-t-on démontré ? **Quelles idées retenir ?**



A comprendre : à ne pas passer trop vite car la **verbalisation des idées** est importante.

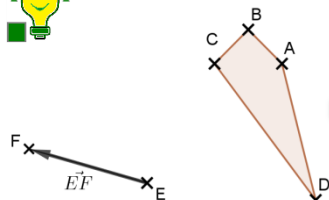


Tester sa compréhension : ce sont souvent des questions « jetables » qui mettent en scène des conceptions ... ne regarder pas trop vite la réponse ! Une fois « spoiler » la question a beaucoup moins d'intérêt.

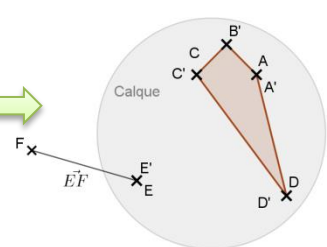
I. Egalité de vecteurs

Représentation mentale d'une translation : « faire glisser sans faire tourner »

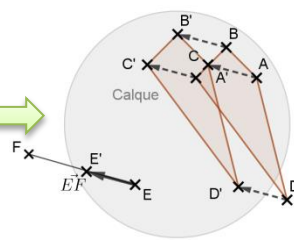
On veut construire l'image du quadrilatère $ABCD$ par la translation qui transforme E en F



On décalque la figure, on nomme A', B', C', D' et E' les points du calque situés (pour l'instant) respectivement au-dessus de A, B, C, D et E

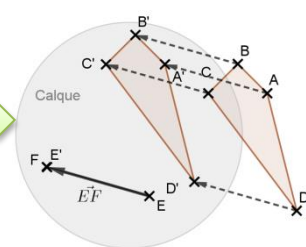


On fait glisser le calque sans le faire tourner pour amener E' au-dessus de F . Le point E' du calque va parcourir le segment $[EF]$.



$ABCD$ a pour image $A'B'C'D'$

Les points A', B', C', D' sont définitivement à leur place.

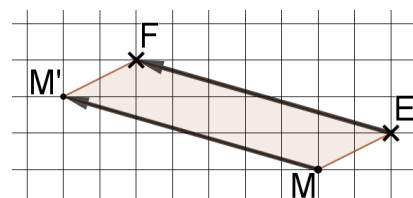


Définition



Soit E et F deux points distincts du plan.

La **translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$** est la transformation qui a tout point M associe l'unique point M' tel que $EFM'M$ soit un parallélogramme.



Remarque Lorsque $E \neq F$, le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est représenté par une flèche orientée de E vers F .
On dit que E est l'**origine** de $\overrightarrow{EF}$ et que F est l'**extrémité** de $\overrightarrow{EF}$.

Notion d'égalité de vecteurs



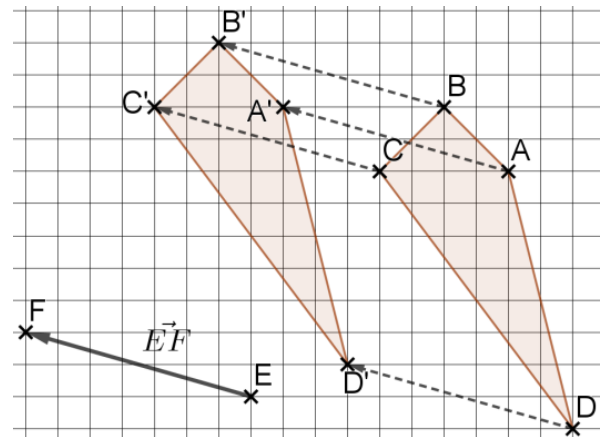
Les flèches représentant

- « le parcours de B à B' »,
- « le parcours de C à C' »,
- « le parcours de D à D' »,
- « le parcours de E à F »

sont parallèles, de même sens, de même longueur.

Chacune de ces flèches sont associées à la **même translation** : elles représentent le même vecteur.

On dira que $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ sont des vecteurs égaux.



Définition



On dit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

On appelle **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues tels $\overrightarrow{EE}$, $\overrightarrow{FF}$, $\overrightarrow{AA}$, ...
La translation de vecteur nul transforme tout point en lui-même.

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD} = \dots$$

Interprétation géométrique « vecteurs égaux »:



Deux vecteurs (non nuls) égaux ont :

- même direction (parallèles),
- même sens
- et même norme (« longueur »)

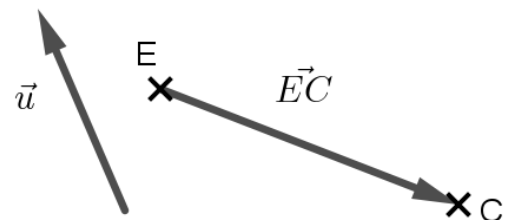
Le vecteur nul ne se présente pas par une flèche : il n'a pas de direction et sa norme (« longueur ») vaut 0.

Nommer les vecteurs, notation pour la norme d'un vecteur

Deux façons pour nommer un vecteur :

- soit on utilise deux points
- soit une seule lettre (sans préciser d'origine et d'extrémité)

Au lycée, en général, les points sont marqués avec des majuscules et les vecteurs en minuscules.

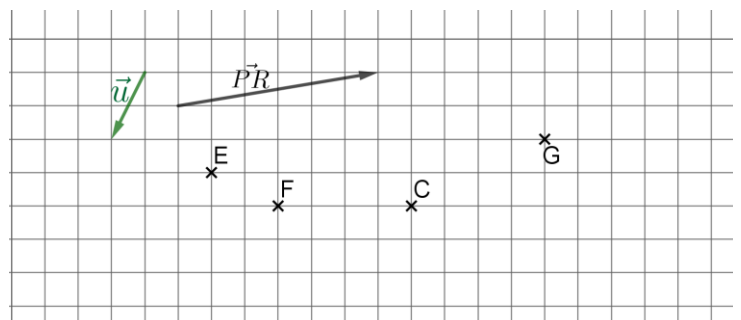


La **norme du vecteur $\vec{u}$** se note $\|\vec{u}\|$, de même la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\|\overrightarrow{AB}\|$

Ex 1 : Un « vecteur a une infinité de représentants »

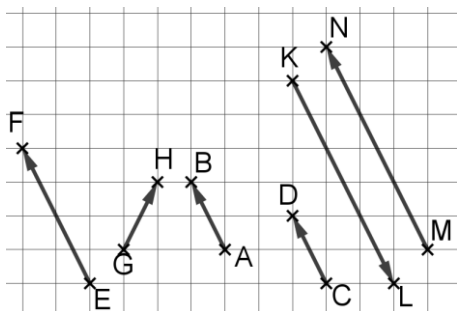


1. Tracer, si possible, le représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour extrémité G
2. Tracer, si possible, le représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant pour origine C
3. Tracer, si possible, 3 représentants du vecteur $\overrightarrow{FE}$
4. Placer, si possible, les points P et R



Les réponses aux exercices se trouvent à la fin du document

Ex 2 : Savoir reconnaître graphiquement les vecteurs ayant même direction, même sens, même norme, égaux ...



Parmi les vecteurs ci-contre, conjecturer (deviner) graphiquement :

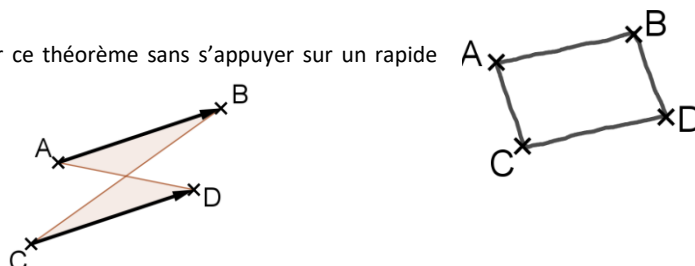
- lesquels ont la même direction ?
- lesquels ont le même sens ?
- lesquels ont la même norme ?
- lesquels sont égaux ?
- lesquels sont opposés ?

Théorème : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **si et seulement si** $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati)



Attention à l'ordre des points, il est conseillé de ne pas utiliser ce théorème sans s'appuyer sur un rapide schéma (même à main levé).

Attention au sens des vecteurs et au nom du quadrilatère
Quand $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, le quadrilatère $ABCD$ est croisé.



Remarque :



Le connecteur logique « *si et seulement si* » résume de manière concise deux théorèmes « *si ... alors ...* », réciproques l'un de l'autre

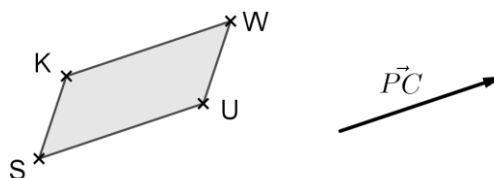
- Si on connaît un parallélogramme, alors on peut en déduire des égalités de vecteurs
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme
- Si on connaît un parallélogramme, alors on peut en déduire des égalités de vecteurs
Si $ABDC$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (et aussi $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$)

Ex 3 : Savoir justifier des égalités de vecteurs



$SKWU$ est un parallélogramme.

Quelles égalités de vecteurs a-t-on ?



Ex 6 : Proposition vraie ou fausse ?



On considère la proposition « Si K est le milieu de $[AB]$ alors $AK = KB$ ». Cette proposition est vraie.

Énoncer sa réciproque. Cette réciproque est-elle vraie ou est-elle fausse ? Justifier.

II. Vecteurs et configurations géométriques

Ex 7: En collège, vous avez appris les deux théorèmes suivants. Ils sont réciproques l'un de l'autre.



- Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu
- Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme

Écrire les deux théorèmes précédents sous forme d'une seule proposition à l'aide d'un « *si et seulement si* »

Théorème :



1. Un quadrilatère est un parallélogramme **si et seulement si** ses diagonales ont le même milieu
2. Un quadrilatère est un parallélogramme **si et seulement si** ses côtés sont parallèles deux à deux

Ex 8 : Enoncer le théorème 2 précédent sous forme de deux propositions « si ... alors ... »



Théorème (admis)



Soit A et B deux points distincts.

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$ si et seulement si K est le milieu de $[AB]$

Ce théorème est une forme synthétique pour résumer les deux théorèmes :

- Si $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$ alors K est le milieu de $[AB]$
- Si K est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$

Conseils pour apprendre à chercher :



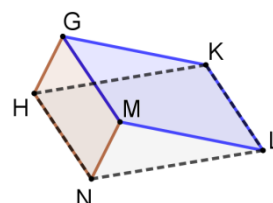
En cas de difficultés, avant de regarder trop vite la réponse, prenez le temps de répondre aux questions :

- Quelles méthodes connaît-on pour montrer une égalité vectorielle ? Recherche en partant de la conclusion
- A partir des données, qu'est qu'on pourrait monter facilement (même si on ne voit pas à quoi cela va nous servir) ? Recherche en partant des hypothèses
- Peut-on **enchaîner** des déductions ?

Ex 9 : Savoir démontrer (sans coordonnées) avec les vecteurs



$NMGH$ et $GMLK$ sont deux parallélogrammes. Prouver que $\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{KL}$.

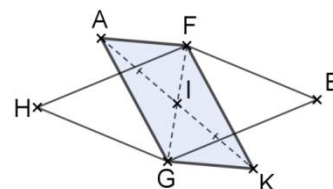


Ex 10 : Savoir démontrer (sans coordonnées) avec les vecteurs



$AFKG$ et $HFEG$ sont deux parallélogrammes.

On appelle I , le milieu de $[AK]$. Démontrer que : $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{KE}$



Ex 12 : Démontrer le théorème dit « théorème de la droite des milieux »

« Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté »

Ex 11 : S'entraîner avec des questions enchainées

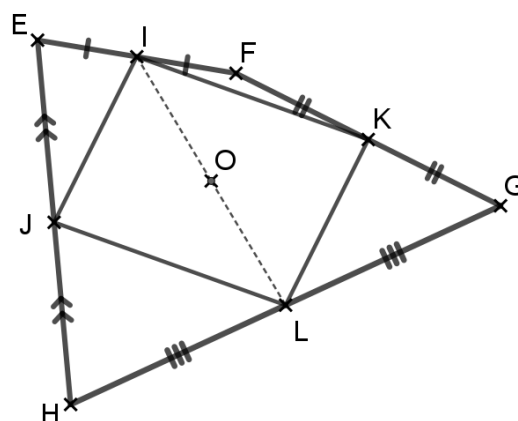
On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

$EFGH$ est un quadrilatère.

I , K , L , J , O sont les milieux respectifs des segments $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[IL]$

1. Démontrer que $(IJ) \parallel (HF)$
2. Démontrer que $IJKL$ est parallélogramme
3. Démontrer que $\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{OK}$

Dans ce type d'exercice, si on ne sait pas faire une question, on peut admettre le résultat pour faire la question suivante.



Notation :



Dans les Eléments d'Euclide¹, AB désignait indifféremment la longueur AB ou la droite (AB) ou le segment AB .

De nos jours, il convient de distinguer soigneusement :

- la droite (AB)
- le segment $[AB]$
- la longueur AB
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$

III. Calculer des distances, calculer des normes

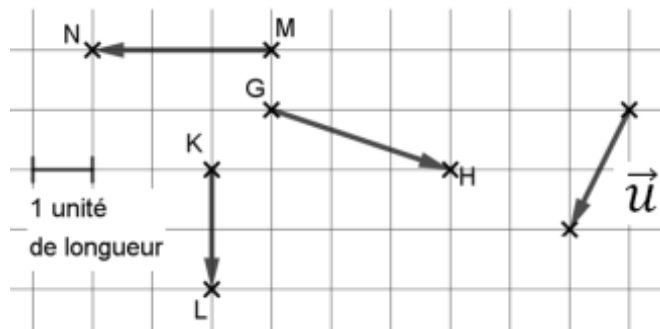
Le plan est muni de la distance usuelle.

Ex 13 : Savoir déterminer graphiquement une norme



Le quadrillage est formé de carrés de côté 1 unité de longueur.

Par lecture graphique, déterminer la valeur exacte de la norme de tous les vecteurs représentés puis donner la valeur arrondie à 10^{-2} près. En mesurant avec une règle, vérifier les valeurs approchées.



Ex 14 : Hauteurs dans un triangle équilatéral

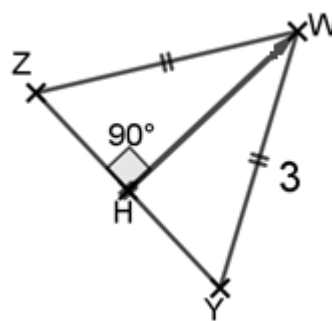


Le plan est muni d'une unité de longueur.

ZYW est un triangle équilatéral de côté 3.

H est le pied de la hauteur de ZYW issue de W

1. Calculer HW
2. Donner la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HW}\|$



Rappels : Trigonométrie dans un triangle rectangle



Comme $[AC]$ est le côté opposé à l'angle droit, on l'appelle l'hypoténuse.

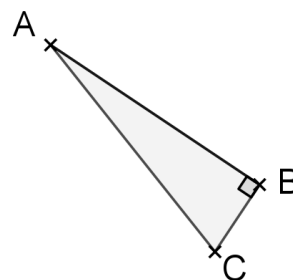
Le côté $[AB]$ est le côté opposé à $\hat{C}$ et aussi le côté adjacent à $\hat{A}$

Le côté $[BC]$ est le côté opposé à $\hat{A}$ et aussi le côté adjacent à $\hat{C}$

Dans un triangle rectangle :



- $\cos(\text{angle aigu}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- $\sin(\text{angle aigu}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- $\tan(\text{angle aigu}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle}}$



¹ Euclide est un mathématicien de la Grèce antique, auteur d'un traité de mathématiques, qui constitue l'un des textes fondateurs de cette discipline en Occident. Aucune information fiable n'est parvenue sur la vie ou la mort d'Euclide ; il aurait vécu vers 300 avant notre ère.

Ex 15 : Savoir donner les formules de trigonométrie dans un triangle rectangle

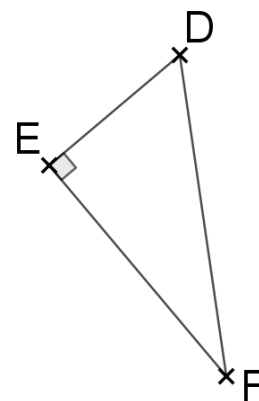


I. Compléter les formules

$$\cos(\hat{F}) = \dots \quad \cos(\hat{D}) = \dots \quad \sin(\hat{F}) = \dots$$

$$\sin(\hat{D}) = \dots \quad \tan(\hat{F}) = \dots \quad \tan(\hat{D}) = \dots$$

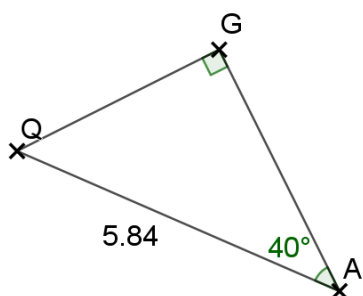
II. Démontrer que : $(\cos(\hat{F}))^2 + (\sin(\hat{F}))^2 = 1$



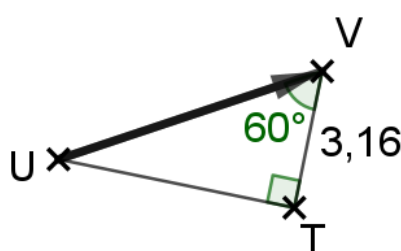
Remarque : Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au sinus de l'autre angle aigu.



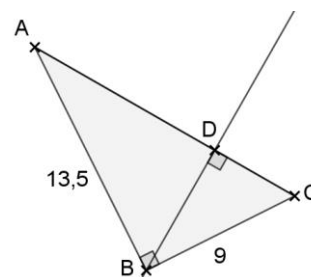
Ex 16 : Savoir utiliser les relations trigonométriques dans un triangle rectangle



1. Calculer une valeur approchée de QG.
En déduire une valeur approchée de $\|\vec{QG}\|$



2. Calculer $\|\vec{UV}\|$



3. Calculer une valeur approchée de $\|\vec{BD}\|$

IV. Corrections

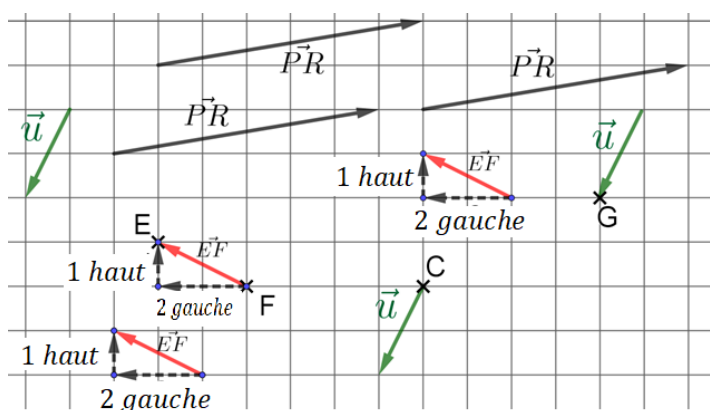
Ex 1

Question 1 et 2

Toutes les flèches qui représentent le vecteur $\vec{u}$ ont la même direction (parallèles), le même sens, la même norme (longueur).

Remarquons que pour aller de l'origine à l'extrémité d'un représentant de $\vec{u}$:

- 1 carreau à gauche
- 2 carreaux en bas



Question 3

Le vecteur $\vec{FE}$ décrit translation pour laquelle F a pour image E : « comment aller de F à E en ligne droite ? »

Toute flèche qui a la même direction (parallèles), le même sens, la même norme (longueur) que la flèche qui relie F à E représente aussi le vecteur $\vec{FE}$: chaque flèche caractérise la translation pour laquelle F a pour image E.

Remarquons que pour aller de F à E, on peut faire 2 carreaux à gauche (codé -2) et un carreau en haut (codé +1)

Question 4



Voici une carte trouvée dans une très vieille bouteille dissimulée dans le double-fond d'une malle décrépite cachée dans un coin du grenier de ma grand-mère.

Trouverez-vous le trésor ?

La carte décrit bien le chemin pour aller de l'arbre mort au trésor.

Mais, vous ne trouverez le trésor que si vous partez de l'arbre mort !

(Comme vous ne savez pas où il est, vous ne trouverez pas le trésor)

Comme pour la carte au trésor, le vecteur $\overrightarrow{PR}$ décrit simplement le chemin pour aller de P à R .

Comme on ne sait pas où est P , on ne sait pas où est R !

D'ailleurs, il existe une infinité de représentants du vecteur $\overrightarrow{PR}$.

Ex 2

- Même direction (parallèles) ?

$\overrightarrow{KL}$; $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ont la même direction

Attention, les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont bien la même direction mais ils n'ont pas le même sens !

- Même sens ?

$\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ont le même sens

$\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont de sens contraire

Attention, comparer le sens des vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{AB}$ est une question qui ne se pose pas car ces vecteurs n'ont pas la même direction !

- Même norme ?

$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même norme mais pas la même direction

$\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont la même norme

$\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même norme

- Égalité de vecteurs ?

Les seuls vecteurs égaux sont $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ car ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

- Vecteurs opposés ?

Les seuls **vecteurs opposés** $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$

car ils ont la **même direction**, la **même norme** mais ils sont de **sens contraire**.

Ex 3 Comme $SKWU$ est un parallélogramme, d'après le théorème précédent, les quatre égalités suivantes sont vérifiées : $\overrightarrow{SK} = \overrightarrow{UW}$ $\overrightarrow{KS} = \overrightarrow{WU}$ $\overrightarrow{KW} = \overrightarrow{SU}$ $\overrightarrow{WK} = \overrightarrow{US}$

Attention, en observant la figure, on suppose que peut-être $\overrightarrow{SU}$ et $\overrightarrow{KW}$ sont égaux à $\overrightarrow{PC}$.

Mais rien dans l'énoncé ne permet de le démontrer.

En mathématiques, seul ce qui est démontré (ou un *axiome*²) est tenu pour vrai !

² Le mot « *axiome* » désigne une proposition posée vraie pour servir de base à une théorie mathématique.

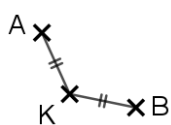
Par exemple, en géométrie, l'axiome d'Euclide « *étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première* » est la pierre angulaire de la géométrie Euclidienne.

Voir Axiomes d'Euclide - axiome des parallèles : « ... János Bolyai et Nikolai Lobachevsky en 1823 se rendirent compte qu'on pouvait très bien considérer des modèles de la géométrie non-contradictoire dans lequel on ne faisait pas cette hypothèse ... »

Ex 6 La réciproque de « Si K est le milieu de $[AB]$ alors $AK = KB$ »

est : « Si $AK = KB$ alors K est le milieu de $[AB]$ »

La réciproque est fausse. Prouvons-le en exhibant un contre-exemple :



Cette figure vérifie bien les hypothèses puisque $AK = KB$

Mais la conclusion est niée car manifestement K n'est pas le milieu de $[AB]$

Un seul contre-exemple suffit à prouver qu'une généralité est fausse : donc la réciproque est fausse.

Ex 7 Un quadrilatère est un parallélogramme **si et seulement si** ses diagonales ont le même milieu

Ex 8 Si un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses côtés sont parallèles deux à deux
 Si un quadrilatère a ses côtés sont parallèles deux à deux **alors** c'est un parallélogramme

Ex 9

Idée : Si on connaît un parallélogramme, on peut en déduire des égalités de vecteurs

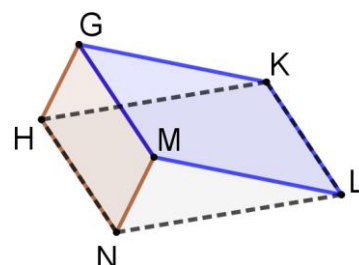
Comme $NMGH$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{GM}$

Comme $GMLK$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{GM}$

Idée : Une seule égalité de vecteur suffit pour déduire qu'un quadrilatère est un parallélogramme (éventuellement aplati)

$\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{GM}$ Donc $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{HN}$

Donc $HKLN$ est un parallélogramme.



Idée : Si on connaît un parallélogramme, on peut en déduire des égalités de vecteurs

Comme $HKLN$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{HN}$

Ex 10

$AFKG$ est un parallélogramme

or **Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu**

donc I , qui est le milieu de $[AK]$, est aussi le milieu de $[FG]$

$FEGH$ est un parallélogramme

or **Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu**

donc I , qui est le milieu de $[FG]$, est aussi le milieu de $[HE]$

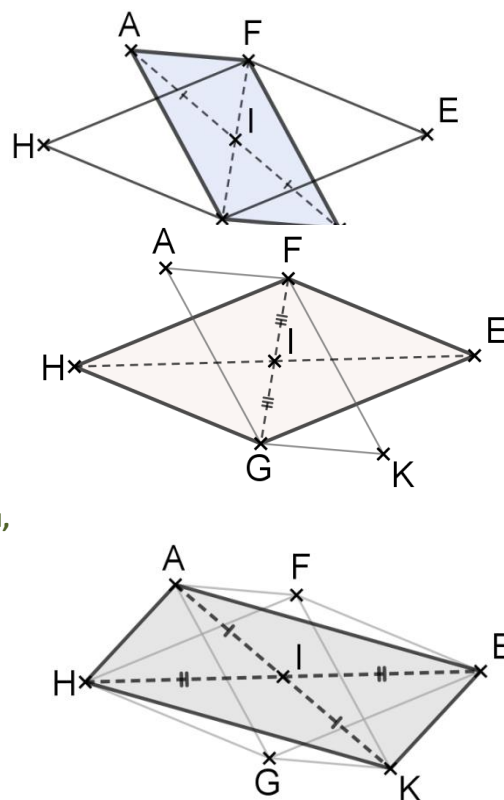
I est le milieu de $[AK]$ et de $[HE]$

Or **Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme**

donc $AEKH$ est un parallélogramme.

Comme $AEKH$ est un parallélogramme,

on a l'égalité vectorielle $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{KE}$



Ex 12 : Principe de la preuve

Pour démontrer une proposition sous la forme « si ... alors ... », une méthode très usuelle consiste à :

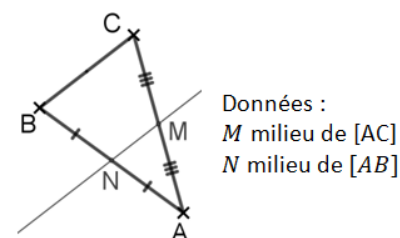
- se placer sous les hypothèses du théorème
Hypothèses : Soit ABC un triangle tel que M et N soient les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$
- d'en déduire la conclusion en justifiant chaque chaînon déductif
Conclusion : $(MN) \parallel BC$

Preuve

M est le milieu de $[AC]$ donc $\frac{AC}{AM} = \frac{2 \times AM}{AM} = 2$

N est le milieu de $[AB]$ donc $\frac{AB}{AN} = \frac{2 \times AN}{AN} = 2$

En résumé: $\frac{AC}{AM} = 2 = \frac{AB}{AN}$



Dans les triangles AMN et ABC ,

- les points A, N, B sont alignés dans cet ordre
- les points A, M, C sont alignés dans cet ordre
- $\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN}$

d'après la réciproque du théorème de Thalès,

les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Ex 11

Question 1 : Montrons que $(IJ) \parallel (HF)$

Dans le triangle EHF , la droite (IJ)

- passe par I le milieu de $[EF]$
- passe par J le milieu de $[EH]$

d'après le théorème de la droite des milieux,

$(IJ) \parallel (HF)$

Question 2

- Dans le triangle GFH , la droite (KL) passe par K et L les milieux de deux côtés donc elle est parallèle au troisième côté $[FH]$

Comme $(IJ) \parallel (FH)$ et $(KL) \parallel (FH)$ on a : $(IJ) \parallel (FH)$

- On montre de même que $(JL) \parallel (IK)$

Dans le triangle EFG , la droite (IK) passe par les milieux de deux côtés donc elle est parallèle au troisième côté : $(IK) \parallel (EG)$

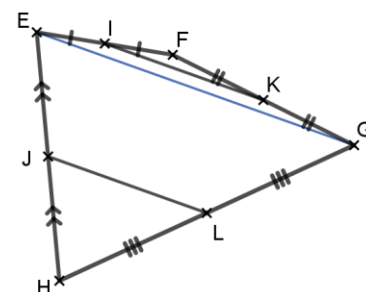
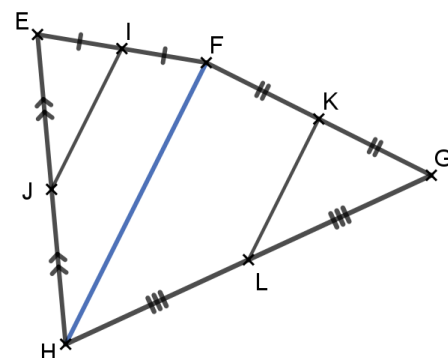
Dans le triangle EHG , la droite (JL) passe par les milieux de deux côtés donc elle est parallèle au troisième côté : $(JL) \parallel (EG)$

En résumé : $(JL) \parallel (EG) \parallel (IK)$

- Dans le quadrilatère $IJKL$ on a $(IK) \parallel (JL)$ et $(IJ) \parallel (FH)$
or **Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles,**

alors ce quadrilatère est un parallélogramme

donc $IJKL$ est un parallélogramme.



Question 3 Montrons que $\vec{JO} = \vec{OK}$

$IJLK$ est un parallélogramme

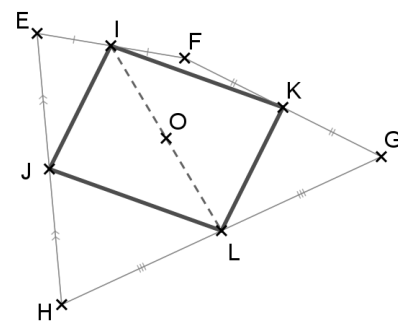
O est le milieu de $[IL]$

or **Si un quadrilatère est un parallélogramme,**

alors ses diagonales ont le même milieu

donc O est aussi le milieu de $[JK]$

donc $\vec{JO} = \vec{OK}$



Ex 13

1. $\|\vec{MN}\| = MN = 3$

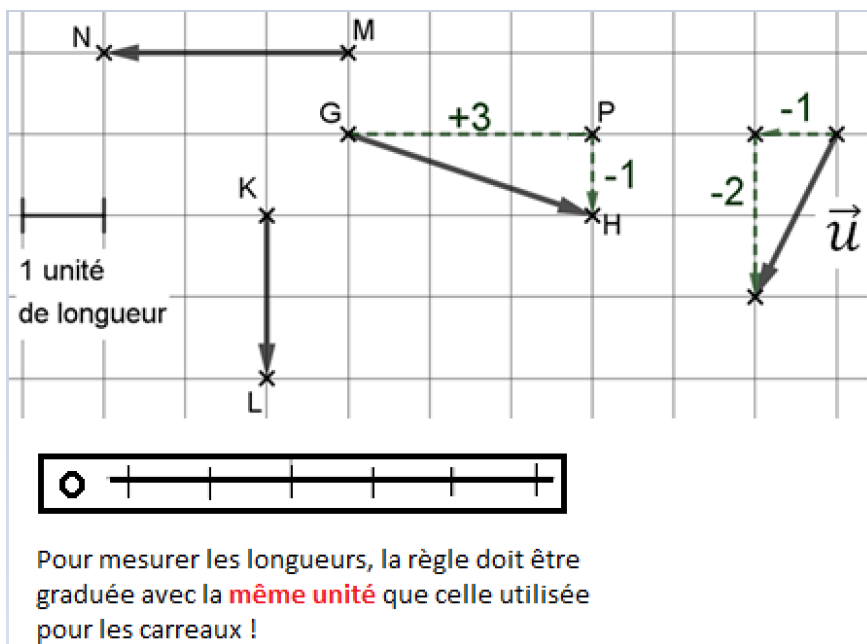
$\|\vec{KL}\| = KL = 2$

D'après le théorème de Pythagore

$$\|\vec{GH}\| = GH = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

D'après le théorème de Pythagore;

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5} \approx 2,24$$



Avant de mesurer, il faut se « fabriquer » la règle en utilisant la même unité que le graphique

Ex 14 :

Question 1

Le triangle ZWY est équilatéral donc en particulier il est isocèle en W (et aussi isocèle en Z et aussi isocèle en Y)

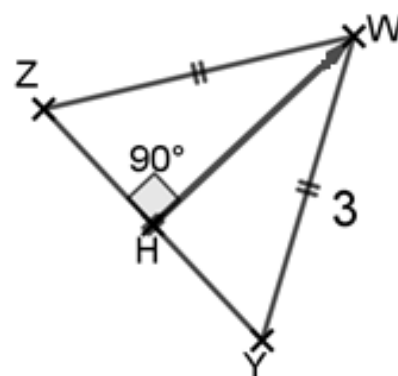
or **Si un triangle est isocèle alors la hauteur issue du sommet principal est aussi médiane et médiatrice du côté opposé**

donc (WH) est aussi la médiane issue de W du triangle ZWY donc H est le milieu de $[ZY]$ donc $HY = \frac{ZY}{2} = \frac{3}{2}$

Dans le triangle ZWH rectangle H , d'après le théorème de Pythagore,

$$HW^2 = ZW^2 - ZH^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$$

$$\text{donc } HW = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{9 \times 3}}{2} = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad HW = -\sqrt{\frac{27}{4}}$$



Question 2 $\|\vec{HW}\| = HW = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Ex 15

Question 1

$$\cos(\hat{F}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{F}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{EF}{DF}$$

$$\sin(\hat{F}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{F}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{ED}{DF}$$

$$\tan(\hat{F}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{F}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{F}} = \frac{ED}{EF}$$

$$\cos(\hat{D}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{D}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{ED}{DF}$$

$$\sin(\hat{D}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{D}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{EF}{DF}$$

$$\tan(\hat{D}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{D}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{D}} = \frac{EF}{ED}$$

Question 2

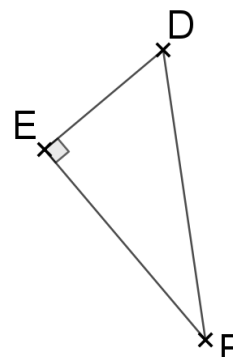
$$\begin{aligned} (\cos(\hat{F}))^2 + (\sin(\hat{F}))^2 &= \left(\frac{EF}{DF}\right)^2 + \left(\frac{ED}{DF}\right)^2 = \frac{EF}{DF} \times \frac{EF}{DF} + \frac{ED}{DF} \times \frac{ED}{DF} \\ &= \frac{EF^2}{DF^2} + \frac{ED^2}{DF^2} = \frac{EF^2 + ED^2}{DF^2} \end{aligned}$$

Dans le triangle DEF rectangle en E , d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$EF^2 + ED^2 = DF^2$$

en reportant

$$(\cos(\hat{F}))^2 + (\sin(\hat{F}))^2 = \frac{DF^2}{DF^2} = 1$$



Ex 16

Question 1

Dans le triangle AQG rectangle en G , on a :

$$\sin(\hat{A}) = \frac{\text{longueur côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{QG}{QA}$$

$$\text{donc } \sin(40^\circ) = \frac{QG}{5,84}$$

$$\text{donc } QG = 5,84 \times \sin(40^\circ) \approx 3,75$$

$$\|\overrightarrow{QG}\| = QG \approx 3,75$$

Produit en « croix »

Pour a, b, c, d nombres non nuls

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } a \times d = b \times c$$

Pour résoudre une équation, c'est-à-dire trouver le quatrième nombre quand on en connaît déjà trois, le « produit en croix » peut être un « raccourci » efficace.

Une explication en partant de

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

en réduisant au même dénominateur

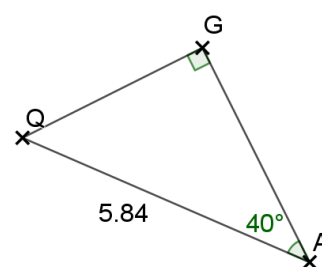
$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

en multipliant chaque membre par bd

$$a \times d = b \times c$$

Rappels des notations :

- $\|\overrightarrow{QG}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{QG}$
- QG désigne la distance entre Q et G , c'est aussi la longueur du segment $[QG]$



Question 2

Les calculatrices de lycée donnent la valeur exacte de $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

Dans le triangle TUV rectangle en T , on a : $\cos(\hat{V}) = \frac{\text{longueur côté opposé à } \hat{V}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{VT}{UV}$

$$\text{donc } \cos(60^\circ) = \frac{3,16}{UV} \quad \text{donc } \cos(60^\circ) \times UV = 3,16$$

$$\text{donc } UV = \frac{3,16}{\cos(60^\circ)} = \frac{3,16}{\frac{1}{2}} = 3,16 \times 2 = 6,32$$

$$\text{donc } \|\overrightarrow{UV}\| = UV = 6,32$$

Question 3

- Dans le triangle ABC rectangle en B ,

$$\tan(\hat{A}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}} = \frac{BC}{AB} = \frac{9}{13,5}$$

$$\text{donc } \hat{A} = \arctan\left(\frac{9}{13,5}\right) \approx 33,69^\circ$$

- Dans le triangle ABD rectangle en D ,

$$\sin(\hat{A}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{13,5}$$

$$\text{donc } BD = 13,5 \times \sin(\hat{A}) \approx 7,5$$

$$\text{donc } \|\overrightarrow{BD}\| = BD \approx 7,5$$

