

I. Le théorème de Pythagore, sa contraposée et sa réciproque

Théorèmes :



- **Théorème de Pythagore :**
Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- **Contraposée du théorème de Pythagore :**
« Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A »
- **Réciproque du théorème de Pythagore :**
« Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A »

Savoir calculer une longueur

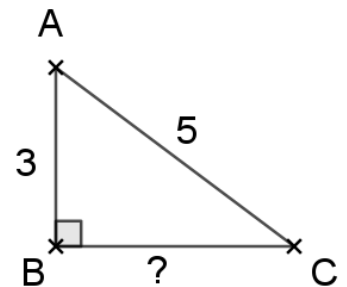
ABC est un triangle rectangle en B tel que : $AB = 3$ et $AC = 5$. Calculer BC .

Correction

Dans le triangle ABC rectangle en B ,

d'après le **théorème de Pythagore** : $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 5^2 - 3^2 = 16$

donc $BC = 4$ ou $BC = -4$ (cas impossible car BC est une longueur)



Savoir prouver qu'un triangle n'est pas rectangle

$AB = AC = 1$ $BC = 1,414$ Le triangle est-il rectangle ?

Correction

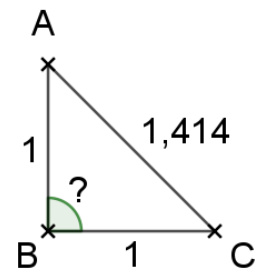
- Comme $\{BC\}$ est le plus grand côté, le triangle ABC ne peut être rectangle qu'en A (s'il est rectangle)
donc ABC n'est ni rectangle en A , ni rectangle en B

- $AB^2 + AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
 $BC^2 = 1,414^2 = 1,999\,396$
comme $2 \neq 1,999\,396$
donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

On teste l'égalité par deux calculs séparés

Attention, l'égalité doit être exacte (pas de « à peu près égal »)

- d'après la **contraposée du théorème de Pythagore**, le triangle ABC n'est pas rectangle en A
- En résumé, ABC n'est pas rectangle !



Savoir prouver qu'un triangle est rectangle

$AB = 40$ $AC = 32$ $BC = 24$. Le triangle est-il rectangle ?

Correction

- Comme $\{AB\}$ est le plus grand côté, le triangle ABC ne peut être rectangle qu'en C (s'il est rectangle)
- $AC^2 + BC^2 = 32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600$
 $AB^2 = 40^2 = 1600$
donc $AC^2 + BC^2 = AB^2$
d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC n'est pas rectangle en A

On teste l'égalité par deux calculs séparés

II. Ensemble des nombres réels

Note historique

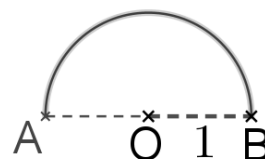
Les racines carrées ont pris naissance à partir d'un problème de géométrie :

« calculer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 »

Pour les grecs, $\sqrt{2}$ était un « nouveau » nombre puisqu'il n'est pas rationnel : il ne peut pas s'écrire $\frac{\text{un entier}}{\text{un entier}}$ (voir plus loin)

Savoir verbaliser : que sont $\sqrt{7}$ et π ?

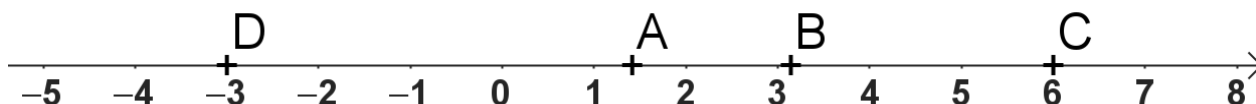
1. $\sqrt{2}$ est le nombre **positif** dont le carré vaut 2. L'autre nombre dont le carré vaut 2 est $-\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}$ est le nombre **positif** dont le carré vaut 3. L'autre nombre dont le carré vaut 3 est $-\sqrt{3}$
3. $\sqrt{4}$ est le nombre **positif** dont le carré vaut 4 donc $\sqrt{4} = 2$. L'autre nombre dont le carré vaut 4 est -2
4. $\sqrt{7}$ est le nombre **positif** dont le carré vaut 7. L'autre nombre dont le carré vaut 7 est $-\sqrt{7}$
5. Lorsqu'on divise la circonférence de n'importe quel cercle par son diamètre, on obtient toujours le même nombre ! Ce nombre est noté π .
Ci-contre, le demi-cercle de rayon 1 a pour longueur π unités de longueur.
 $\sqrt{7}$ et π sont indispensables pour pouvoir mesurer (de façon exacte) des longueurs !



Ensemble des réels

L'ensemble des nombres réels est formé de tous les nombres permettant de mesurer une longueur et de leurs opposés. Sur une droite graduée, on peut repérer tous les points par un nombre appelé son **abscisse**.

Les points D, A, B, C ont respectivement pour abscisses : -3 ; $\sqrt{2}$; π ; 6



L'ensemble des **réels**, noté $\mathbb{R}$, est formé de toutes les abscisses possibles d'une droite graduée.

Les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, -3 , 6, π sont tous des réels (ainsi que tous les nombres que vous rencontrerez en seconde et première).

Définition de la racine carrée d'un réel



Pour $a > 0$, $\sqrt{a}$ est le **nombre positif** dont le carré vaut a . L'autre nombre dont le carré vaut a est $-\sqrt{a}$

Pour $a < 0$, il n'existe pas de nombre réel dont le carré est a . Dit autrement $\sqrt{a}$ n'existe pas

Pour $a = 0$, il existe un seul nombre dont le carré vaut 0 : lui-même ! Donc $\sqrt{0} = 0$

III. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Savoir prouver une généralité (en utilisant le calcul algébrique)

1. Prouver que « si un entier est pair alors son carré est pair »
2. Prouver que « si un entier est impair alors son carré est impair »
3. Enoncer la contraposée de « si un entier est impair alors son carré est impair ».
4. Justifier que « si le carré d'un entier est pair alors l'entier est lui aussi pair »

Correction

Question 1 : Savoir prouver une généralité en utilisant le calcul algébrique

Pour prouver une proposition « si ... hypothèses ... alors ... conclusion ... »,

on se place sous les hypothèses puis par déductions successives, on en déduit la conclusion

Hypothèses : soit a un entier pair

Déductions : comme a est pair, il existe un entier k tel que : $a = 2 \times k$
son carré est $a^2 = (2k)^2 = 2k \times 2k = 2 \times 2 \times k \times k = 2 \times 2 k^2$
donc a^2 peut s'écrire $2 \times \text{entier}$

Conclusion : a^2 est un nombre pair

Question 2 : Savoir prouver une généralité en utilisant le calcul algébrique

Pour prouver une proposition « si ... hypothèses ... alors ... conclusion ... », on se place sous les hypothèses puis par déductions successives, on en déduit la conclusion

Hypothèses : soit a un entier impair

Déductions : comme a est impair, il existe un entier k tel que : $a = 2k + 1$

$$\text{son carré est } a^2 = (2k + 1)^2 = (2k + 1) \times (2k + 1) = 4k^2 + 2k + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\text{donc } a^2 = 2 \times 2k^2 + 2 \times 2k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2) + 1 = 2 \times \text{entier} + 1$$

Conclusion : a^2 est un nombre impair

Question 3 :

La contraposée de « si un entier est impair alors son carré est impair » est
« si le carré d'un entier n'est pas impair alors l'entier n'est pas impair ».

Question 4 : Quand une proposition est vraie, il en est de même de sa contraposée.

Comme un entier qui n'est pas impair est forcément pair, la contraposée peut se reformuler :
« si le carré d'un entier est pair alors l'entier est pair ».

Comme la proposition « si un entier est impair alors son carré est impair » est vraie (voir question 2), sa contraposée « si le carré d'un entier est pair alors l'entier est pair » est vraie aussi.

Savoir prouver par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel

Il existe deux entiers a et b tels que : $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. De plus on suppose que a et b ne sont pas pairs tous les deux (sinon on divise numérateurs et dénominateurs par 2 autant de fois que nécessaire).

Comme $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ donc $a = \sqrt{2} b$ donc leurs carrés sont égaux $a^2 = (\sqrt{2} b)^2 = \sqrt{2} b \times \sqrt{2} b = 2 \times b^2$
donc a^2 est un entier pair donc a est pair (question 4) donc il existe un entier k tel que : $a = 2k$
En reportant dans l'égalité $a^2 = 2 b^2$, on a : $(2k)^2 = 2b^2$ donc $4k^2 = 2b^2$ donc $2 \times k^2 = b^2$
donc b^2 est un entier pair donc b est pair (question 4)

Il y a une contradiction puisqu'alors a et b sont pairs tous les deux.

L'hypothèse doit être rejetée.

donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

IV. Calculer avec des racines carrées

Savoir simplifier $A = \sqrt{5}^3 - \sqrt{4}^4 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} - 2^4 = 5\sqrt{5} - 16$

$$B = \sqrt{7}^3 - 5\sqrt{7} = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} - 5\sqrt{7} = 7\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = (7 - 5)\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

$$C = (2 + \sqrt{3})^2 - 17 = (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) - 17 = 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3 - 17 = -10 + 4\sqrt{3}$$

Carrés parfaits



$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$
$12^2 = 144$	$13^2 = 169$	$14^2 = 196$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	

Savoir encadrer

- 1) Donner un encadrement de $\sqrt{79}$ par deux entiers consécutifs

On sait que $64 < 79 < 81$

En passant aux racines carrées, l'ordre est conservé

Donc $\sqrt{64} < \sqrt{79} < \sqrt{81}$ donc $8 < \sqrt{79} < 9$

- 2) Donner un encadrement de $\sqrt{41}$ par deux entiers consécutifs

On sait que $36 < 41 < 49$

En passant aux racines carrées, l'ordre est conservé

donc $\sqrt{36} < \sqrt{41} < \sqrt{49}$ donc $6 < \sqrt{41} < 7$

Exercice Justifier que : $\sqrt{9 \times 2} = 3 \times \sqrt{2}$

Correction

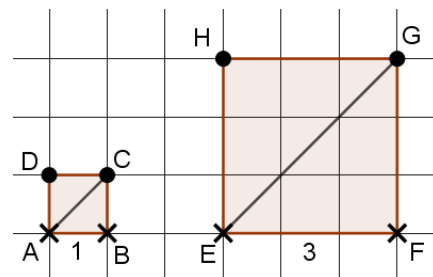
Dans le triangle ABC rectangle en B , d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $AC = \sqrt{2}$

Dans le triangle EGF rectangle en F , d'après le théorème de Pythagore, $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ donc $EG = \sqrt{18}$

Comme le carré $EFGH$ est trois fois plus grand que le carré $ABCD$: $EG = 3 \times AC$

Donc $\sqrt{18} = 3 \times \sqrt{2}$ d'où $\sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2}$

C'est une illustration de la propriété $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$



Propriétés (admise)



1. Pour tous les réels a et b positifs, on a : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

2. Pour tous les réels a positif et b strictement positif, on a : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Savoir-faire en mode automatique (20 secondes le calcul !)

	Réponses
Simplifier si possible $\sqrt{9 + 25}$	$\sqrt{34}$
Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b entiers ; le plus petit possible) $G = \sqrt{75}$	$\sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
Donner une valeur approchée de $\sqrt{93}$	$81 < 93 < 100$ donc $\sqrt{93} \approx 9, \dots$
Calculer $(2\sqrt{7})^3$	$2\sqrt{7} \times 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{7} = 56\sqrt{7}$
Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b entiers ; b le plus petit possible) $B = \sqrt{72}$	$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
Simplifier si possible $\sqrt{11} - \sqrt{7}$	Ne se simplifie pas
Simplifier si possible $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$	$\sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$
Calculer $\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4}$	$0 + 1 + \sqrt{2} + 2 = 3 + \sqrt{2}$

V. Le point sur les ensembles de nombres rencontrés



- L'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots\}$ est appelé ensemble des entiers naturels. Cet ensemble se note $\mathbb{N}$.
- L'ensemble $\{\dots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots\}$ est appelé ensemble des entiers relatifs. Cet ensemble se note $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ est appelé ensemble des nombres décimaux. Cet ensemble se note $\mathbb{D}$.
- L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}$ privé de 0) est appelé ensemble des rationnels. Cet ensemble se note $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble des abscisses d'une droite graduée est appelé ensemble des réels. Cet ensemble se note $\mathbb{R}$.

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

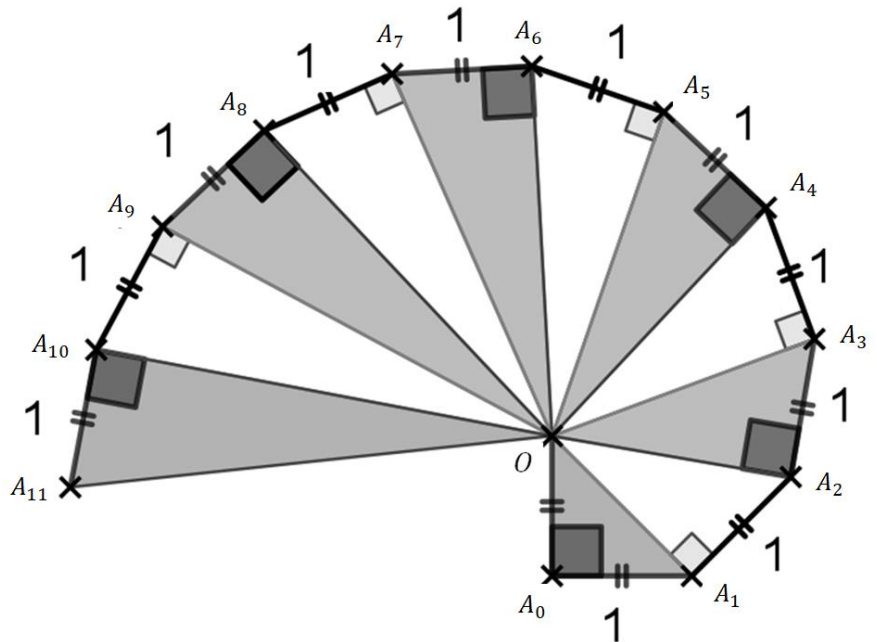
Le symbole $\subset$ se lit « inclus ». Il se met entre une partie et un ensemble qui la contient : $\{3 ; 7 ; 9\} \subset \mathbb{N}$.

Le symbole $\in$ se lit « appartient ». Il se met entre un élément et un ensemble qui le contient : $3 \in \mathbb{N}$

Activité

Enoncé

1. Calculer OA_6
2. Soit n un entier naturel.
Conjecturer une formule donnant OA_n en fonction de n
3. En appliquant le même procédé, combien (au total) peut-on construire de triangles rectangles sans chevaucher un triangle déjà construit ?



Réponses

Question 1

En appliquant successivement le théorème de Pythagore :

- au triangle OA_0A_1 $OA_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- au triangle OA_1A_2 $OA_2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$
- au triangle OA_2A_3 $OA_3 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$
- au triangle OA_3A_4 $OA_4 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- au triangle OA_4A_5 $OA_5 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{1 + 5} = \sqrt{6}$
- au triangle OA_5A_6 $OA_6 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{1 + 6} = \sqrt{7}$

Question 2

Conjecture : Pour $n \in \mathbb{N}$, $OA_n = \sqrt{n + 1}$

Question 3

Rappel : Dans un triangle rectangle, $\tan(\text{angle aigu}) = \frac{\text{longueur côté opposé à l'angle}}{\text{longueur côté adjacent à l'angle}}$

Tangente	Valeurs approchées de l'angle	Somme des angles (valeurs approchées)
$\tan(\widehat{A_0OA_1}) = \frac{A_0A_1}{OA_0} = \frac{1}{1}$	$\widehat{A_0OA_1} = \arctan(1) \approx 45^\circ$	45°
$\tan(\widehat{A_1OA_2}) = \frac{A_1A_2}{OA_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\widehat{A_1OA_2} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35,3^\circ$	$45 + 35,3 = 80,3^\circ$
$\tan(\widehat{A_2OA_3}) = \frac{A_2A_3}{OA_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\widehat{A_2OA_3} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 30^\circ$	$80,3 + 30 = 110,3^\circ$
$\tan(\widehat{A_3OA_4}) = \frac{A_3A_4}{OA_3} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$	$\widehat{A_3OA_4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26,6^\circ$	$110,3 + 26,6 = 136,8^\circ$
$\tan(\widehat{A_4OA_5}) = \frac{A_4A_5}{OA_4} = \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\widehat{A_4OA_5} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 24,1^\circ$	$136,8 + 24,1 = 160,9^\circ$
$\tan(\widehat{A_5OA_6}) = \frac{A_5A_6}{OA_5} = \frac{1}{\sqrt{6}}$	$\widehat{A_5OA_6} \approx 22,2^\circ$	$160,9 + 22,2 = 183,1^\circ$
$\tan(\widehat{A_6OA_7}) = \frac{A_6A_7}{OA_6} = \frac{1}{\sqrt{7}}$	$\widehat{A_6OA_7} \approx 20,7^\circ$	$183,1 + 20,7 = 203,8^\circ$
$\tan(\widehat{A_7OA_8}) = \frac{A_7A_8}{OA_7} = \frac{1}{\sqrt{8}}$	$\widehat{A_7OA_8} \approx 19,5^\circ$	$203,8 + 19,5 = 223,3^\circ$
$\tan(\widehat{A_8OA_9}) = \frac{A_8A_9}{OA_8} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$	$\widehat{A_8OA_9} \approx 18,4^\circ$	$223,3 + 18,4 = 241,7^\circ$
$\tan(\widehat{A_9OA_{10}}) = \frac{A_9A_{10}}{OA_9} = \frac{1}{\sqrt{10}}$	$\widehat{A_9OA_{10}} \approx 17,5^\circ$	$241,7 + 17,5 = 259,3^\circ$
$\tan(\widehat{A_{10}OA_{11}}) = \frac{A_{10}A_{11}}{OA_{10}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$	$\widehat{A_{10}OA_{11}} \approx 16,8^\circ$	$259,3 + 16,8 = 276,1^\circ$
$\tan(\widehat{A_{11}OA_{12}}) = \frac{A_{11}A_{12}}{OA_{11}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$	$\widehat{A_{11}OA_{12}} \approx 16,1^\circ$	$276,1 + 16,1 = 292,2^\circ$
$\tan(\widehat{A_{12}OA_{13}}) = \frac{A_{12}A_{13}}{OA_{12}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$	$\widehat{A_{12}OA_{13}} \approx 15,5^\circ$	$292,2 + 15,5 = 307,7^\circ$
$\tan(\widehat{A_{13}OA_{14}}) = \frac{A_{13}A_{14}}{OA_{13}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$	$\widehat{A_{13}OA_{14}} \approx 15^\circ$	$307,7 + 15 = 322,6^\circ$
$\tan(\widehat{A_{14}OA_{15}}) = \frac{A_{14}A_{15}}{OA_{14}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$	$\widehat{A_{14}OA_{15}} \approx 14,5^\circ$	$322,6 + 14,5 = 337,1^\circ$
$\tan(\widehat{A_{15}OA_{16}}) = \frac{A_{15}A_{16}}{OA_{15}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$	$\widehat{A_{15}OA_{16}} \approx 14^\circ$	$337,1 + 14 = 351,2^\circ$
$\tan(\widehat{A_{16}OA_{17}}) = \frac{A_{16}A_{17}}{OA_{16}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$	$\widehat{A_{16}OA_{17}} \approx 13,6^\circ$	$351,2 + 13,6 = 364,8^\circ$

Au-delà de 360° , plus d'un tour a été effectué : les triangles se chevauchent.

