

I. Quelques critères de divisibilité

- 
- **par 2 :** Un nombre est divisible par 2, si et seulement si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
 - **par 3 :** Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
 - **Par 5 :** Un nombre est divisible par 5, si et seulement si son chiffre des unités est 0, ou 5.
 - **Par 10 :** Un nombre est divisible par 10, si et seulement si son chiffre des unités est 0.

Exemple : pour $n \in \mathbb{N}$, 10^n a pour écriture décimale un seul 1 suivi d'éventuels 0 (rappel : $10^0 = 1$)
donc la somme des chiffres de 10^n est 1 donc 10^n n'est pas divisible par 3

II. Un peu de logique

Objectif : connaître le vocabulaire, savoir l'expliquer. Savoir énoncer des contraposée, des réciproques de propositions « si... alors ... »

Notion de contre-exemple

Un **contre-exemple** d'une proposition « *si hypothèses alors conclusion* » est un cas particulier qui :

- vérifie les hypothèses
- contredit la conclusion

Un seul contre-exemple suffit pour prouver qu'une généralité est fausse.

Conjecture

Une **conjecture** est une proposition mathématique que l'on pense vraie mais dont on n'a pas encore produit de démonstration. Attention, des exemples **ne suffisent pas** à prouver qu'une conjecture est vraie !

Exemple (hors-programme) : la **conjecture de Golbach**, datant de 1742. Elle s'énonce très simplement : tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Elle a été testée pour tous les entiers pairs jusqu'à des nombres de 18 chiffres ... aucun mathématicien n'a réussi (pour l'instant) à trouver de démonstration !

Contraposée d'une implication

La **contraposée** de « *si A alors B* » s'énonce « *si on n'a pas B alors on n'a pas A* »

Quand une proposition est vraie, il en est de même de sa contraposée.

- La contraposée de « *si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu alors c'est un parallélogramme* » est « *si un quadrilatère n'est pas un parallélogramme alors il n'a pas ses diagonales de même milieu* »
- La contraposée de « *si l'écriture décimale d'un entier se termine par 0 alors il est divisible par 10* » est « *si un entier n'est pas divisible par 10 alors son écriture décimale ne se termine pas par 0* »

Réciproque d'une implication

La **réciproque** de « *si A alors B* » s'énonce « *si B alors A* »

Attention, la réciproque d'une proposition vraie peut s'avérer fausse !

- La réciproque de « *si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu alors c'est un parallélogramme* » est « *si un quadrilatère est un parallélogramme alors il a ses diagonales de même milieu* »
- La réciproque de « *si l'écriture décimale d'un entier se termine par 0 alors il est divisible par 10* » est « *si un entier est divisible par 10 alors son écriture décimale se termine par 0* »

III. Des exemples de preuves

Objectif immédiat : comprendre ce catalogue de méthodes

Objectif de l'année : le mettre en œuvre en situations

Prouver par contraposition

On considère la proposition « *si l'écriture décimale d'un entier se termine par 5 alors il est divisible par 5* »

Énoncer sa contraposée. Cette proposition contraposée est-elle vraie ? Justifier.

Correction

Sa contraposée est « *si un entier n'est pas divisible par 5 alors son écriture décimale ne se finit pas par 5* »
or la proposition « *si l'écriture décimale d'un entier se termine par 5 alors il est divisible par 5* » est vraie
donc il en est de même de sa contraposée.

Preuve par disjonction des cas

Montrer que « si le carré d'un entier est divisible par 10 alors l'entier est aussi divisible par 10 ».

Correction

Soit n un entier. Nous allons examiner tous les cas possibles pour le dernier chiffre de n

Dernier chiffre de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Comme n^2 carré est divisible par 10, le dernier chiffre de n^2 est 0.

Le seul cas possible est que le dernier chiffre de n soit aussi 0
donc n est aussi divisible par 10.

Prouver une implication « si ... hypothèses ... alors ... conclusion ... »

Prouver que : si deux entiers sont multiples d'un entier n alors leur somme est aussi un multiple de n »

Correction

Le plus souvent, pour prouver une proposition « *si ... hypothèses ... alors ... conclusion ...* » :

- on se place sous les hypothèses
- par justifications successives, on en déduit la conclusion

Hypothèses : soit a et b deux entiers multiples de n

Déductions : comme a est multiple de n , il existe un entier k tel que : $a = k \times n$

comme b est multiple de n , il existe un entier h tel que : $b = h \times n$

leur somme est : $a + b = k \times n + h \times n = (k + h) \times n = \text{un entier} \times n$

Conclusion : la somme est un multiple de n

Prouver une généralité à l'aide du calcul littéral

Prouver que « *si entier naturel se termine par 28 alors il est divisible par 4* »

Correction

Pour prouver une généralité de nombreux exemples ne suffisent pas.

On va raisonner sur des entiers quelconques en utilisant le calcul littéral.

Soit n un entier naturel quelconque dont l'écriture décimale se termine par 28.

Appelons c le nombre de centaines contenues dans n . On a donc : $n = 100 \times c + 28$

donc $n = 100 \times c + 28 = 4 \times 25c + 4 \times 7 = 4 \times (25c + 7) = 4 \times \text{un entier}$

donc n est divisible par 4.

Prouver en exhibant un contre-exemple

On considère la proposition vraie « *si l'écriture décimale d'un entier se termine par 5 alors il est divisible par 5* »

Enoncer sa réciproque. Cette proposition réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Correction

La réciproque est « *si un entier est divisible par 5 alors son écriture décimale se termine par 5* »

Considérons l'entier 20.

Comme $20 = 4 \times 5$, l'entier 20 vérifie l'hypothèse « *l'entier est divisible par 5* » est vérifiée.

Mais 20 se termine par 0 donc l'entier 20 ne vérifie pas la conclusion « *écriture décimale se termine par 5* »

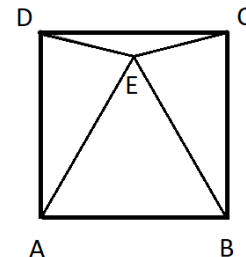
On a trouvé un contre-exemple : la réciproque est fausse !

Prouver par déductions successives

$ABCD$ est un carré.

Le point E est le point à l'intérieur du carré tel que ABE soit un triangle équilatéral.

Calculer la mesure de $\widehat{CED}$.



Correction : plan d'une démonstration possible

- Montrons que : $\widehat{AED} = 75^\circ$

$ABCD$ carré

$$\widehat{DAB} = 90^\circ$$

$$AB = AD$$

ADE isocèle en A

$$\widehat{ADE} = \widehat{AED}$$

$$\widehat{AED} = 75^\circ$$

ABE équilatéral

$$AE = AB$$

$$\widehat{EAB} = 60^\circ$$

$$\widehat{DAE} = 30^\circ$$

- Calcul de $\widehat{CED}$

On montre de même que : $\widehat{BEC} = 75^\circ$

$$\text{donc } \widehat{CED} = 360 - \widehat{AED} - \widehat{AEB} - \widehat{BEC} = 360 - 75 - 60 - 75 = 150^\circ$$

IV. Ensembles de quotients d'entiers

Ensemble des décimaux



Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ (rappel : $10^0 = 1$)

L'ensemble des décimaux se note $\mathbb{D}$

Exemples $-3 = -\frac{3}{10^0}$ $5,23 = \frac{523}{10^2}$ $-4,2 = \frac{-4,2}{10} = \frac{-42}{10^1}$ $\sqrt{6,25} = 2,5 = \frac{25}{10^1}$

Donc -3 ; $5,237$; $-4,2$; $\sqrt{6,25}$ sont quatre nombres décimaux.

Ensemble des rationnels



Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers ($b \neq 0$)

L'ensemble des rationnels se note $\mathbb{Q}$.

Exemples $-\frac{7}{11}$ $0,123 = \frac{123}{1000}$ $\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$ $-9 = \frac{-9}{1}$ $-2,5 = \frac{-5}{2}$

Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est un nombre décimal (preuve par l'absurde)

Supposons que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal

- Il existerait un entier relatif a et un entier naturel n tel que : $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$
donc on aurait $3 \times a = 10^n$
donc 10^n serait un multiple de 3
donc la somme des chiffres de 10^n serait divisible par 3
- mais la somme des chiffres de l'écriture décimale de 10^n a un seul 1 suivi d'éventuels 0
donc la somme des chiffres de 10^n est 1 donc 10^n n'est pas divisible par 3

On arrive donc à une contradiction, à une absurdité :

10^n ne peut pas être à la fois divisible par 3 et pas divisible par 3

L'hypothèse doit être rejetée.

donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$