

Micro-chapitre : Ensemble d'entiers

Opposés :  Deux nombres sont **opposés** l'un de l'autre lorsque leur somme vaut 0
 -7 ; 12 ; $\sqrt{11}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{-7}{8}$; 0 ont pour opposés respectifs 7 ; -12 ; $-\sqrt{11}$; $\frac{-2}{3}$; $\frac{7}{8}$; 0

Inverses :  Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit vaut 0
 -7 ; 12 ; $\sqrt{11}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{-7}{8}$ ont pour inverses respectifs $\frac{-1}{7}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{\sqrt{11}}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{-8}{7}$
Le nombre 0 est le seul nombre qui n'a pas d'inverse !

Les entiers naturels

Un entier naturel est un nombre permettant de compter des objets: une pierre, deux pierres... un mouton, deux moutons, trois moutons ... Remarquons que s'il a 1 mouton et que le loup le mange : il reste 0 mouton.

 L'ensemble des **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; \dots\}$

Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est formé des entiers naturels $0 ; 1 ; 2 ; 3 \dots$ et de leurs opposés $-1 ; -2 ; -3 ; \dots$

 L'ensemble des **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$ est $\{\dots ; -7 ; 6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; \dots\}$

Division euclidienne de deux entiers

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 & 4 & 3 \\ -6 & & & \\ \hline 2 & 5 & & \\ -2 & 4 & & \\ \hline 1 & 4 & & \\ -1 & 2 & & \\ \hline 2 & & & \end{array}$$

On a donc : $854 = 3 \times 284 + 2$

284 s'appelle le quotient et 2 s'appelle le reste.

Dans la division d'un entier par 3, le reste ne peut qu'être 0 ; 1 ; 2

De même, dans une division euclidienne par 7 le reste ne peut être que 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6 puisque l'on a toujours: $0 \leq \text{reste} < \text{quotient}$

Multiple et diviseurs Soit a et b deux entiers.

-  • On dit que a est un **multiple** de b lorsqu'il existe un **entier** k tel que : $a = k \times b$
• Pour b non nul, on dit que b est un **diviseur** de a lorsqu'il existe un **entier** k tel que : $a = k \times b$
ce qui revient à dire que a est un multiple de b ou encore que le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0

Entiers pairs, impairs

- Un entier est pair lorsque le reste de sa division euclidienne par 2 est 0. Ainsi :

 L'entier a est dit **pair** lorsqu'il existe un entier k tel que : $a = 2k$

- Un entier est impair lorsque le reste de sa division euclidienne par 2 est 1.

 L'entier a est dit **impair** lorsqu'il existe un entier k tel que : $a = 2k + 1$

$$\begin{array}{r|l} \text{entier } a & 2 \\ \dots & \text{entier } k \\ \dots & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{entier } a & 2 \\ \dots & \text{entier } k \\ \dots & \\ 1 & \end{array}$$

Savoir-faire 1 : compréhension des définitions

- Montrer que -7 est un diviseur de 343
- Dresser la liste de tous les diviseurs de 12
- Combien de multiples de 141 sont compris entre 12 000 et 30 000 ?

Savoir-faire 2 : prouver une généralité

Démontrer que la somme de deux entiers impairs est paire

Correction savoir-faire 1

1. $343 = -7 \times (-49)$ donc -7 est un diviseur de 343
2. Les diviseurs de 12 sont -12 ; -6 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12
3. Un multiple de 141 est de la forme $141 \times k$ avec k entier
On cherche les valeurs de k pour lesquelles $12\,000 < 141 \times k < 30\,000$
En divisant chaque membre par 141 $\frac{12\,000}{141} < k < \frac{30\,000}{141}$
Comme $\frac{12\,000}{141} \approx 85,1$ et $\frac{30\,000}{141} \approx 212,8$, $86 \leq k \leq 212$
Comme $212 - 86 + 1 = 127$, il y a 127 multiples de 141 entre 12 000 et 30 000.

En divisant chaque membre par 141 qui est **positif**, on obtient une inégalité de **même sens**

Correction savoir-faire 2

Pour prouver une généralité de nombreux exemples ne suffisent pas.
On va raisonner sur des entiers quelconques en utilisant le calcul littéral.

Soit a et b deux entiers impairs.

Comme a est impair, il existe un entier k tel que : $a = 2k + 1$

Comme b est impair, il existe un entier h tel que : $b = 2h + 1$

La somme est : $a + b = 2k + 1 + 2h + 1 = 2 \times k + 2 \times h + 2 \times 1 = 2 \times (k + h + 1) = 2 \times \text{un entier}$
donc la somme est paire.

La multiplication par 2 se retrouve dans chaque terme : $2k$; $2h$ et 2×1 .
On met 2 en « facteur commun ».