

## I. Vecteurs et lectures graphiques

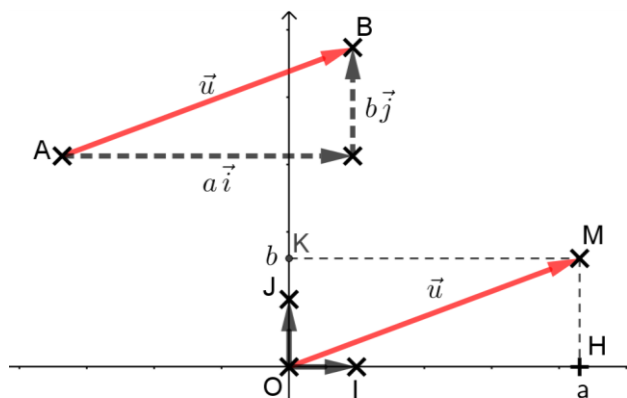
- Savoir lire les coordonnées d'un point ou d'un vecteur.
- Connaissant les coordonnées d'un vecteur, savoir construire un de ses représentants.

### Notion de base (comprendre)

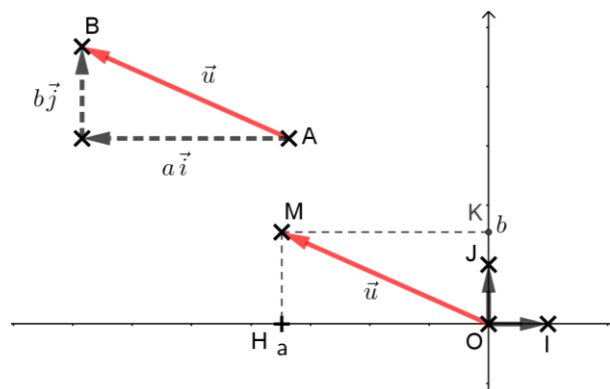
Soit  $(O ; I ; J)$  un repère du plan. Soit  $\vec{u}$  un vecteur.

Soit  $M$  le seul point tel que :  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  (  $M$  est l'image de  $O$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$  )

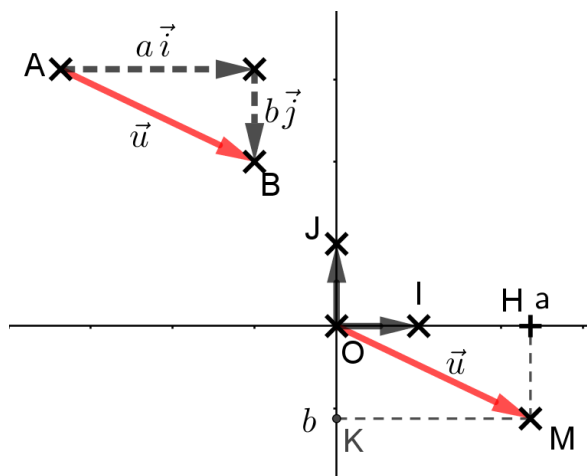
Dans le repère  $(O ; I ; J)$ , le point  $M$  a pour coordonnées  $(a ; b)$ . Le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  a pour coordonnées  $(a ; b)$



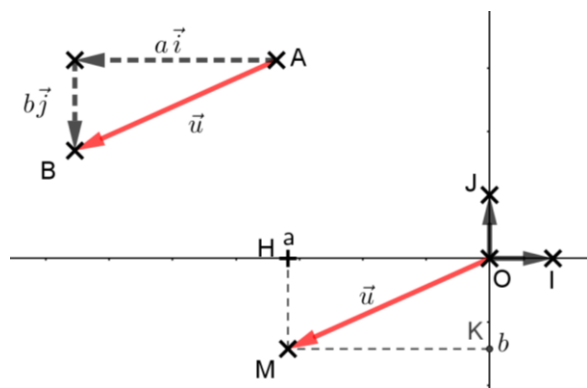
Cas :  $a > 0$  et  $b > 0$



Cas :  $a < 0$  et  $b > 0$



Cas :  $a > 0$  et  $b < 0$



Cas  $a < 0$  et  $b < 0$

On pose :  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  on a :  $\overrightarrow{OH} = a \vec{i}$   $a$  existe car  $(OH)$  et  $(OI)$  ont la même direction (parallèles)

On pose :  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$  on a :  $\overrightarrow{OK} = b \vec{j}$   $b$  existe car  $(OK)$  et  $(OJ)$  ont la même direction (parallèles)

Dans tous les cas :  $\vec{u} = a \vec{i} + b \vec{j}$

On dit que  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  est un repère du plan. On dit que  $(\vec{i} ; \vec{j})$  est une base des vecteurs du plan

Ainsi, dans un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  :

Ecrire  $\vec{u}(a ; b)$  revient à écrire  $\vec{u} = a \vec{i} + b \vec{j}$

### Lecture 1

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan.

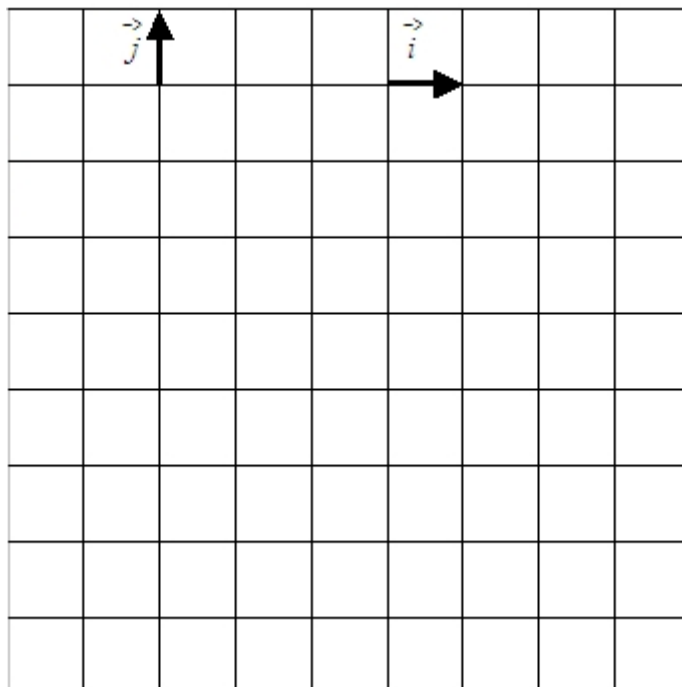
La position de  $O$  n'intervient pas dans cet exercice : pour définir les coordonnées d'un vecteur, il suffit de connaître  $(\vec{i}; \vec{j})$ .

1) Donner une représentation des vecteurs :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Exprimer chacun des quatre vecteurs

précédents en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .



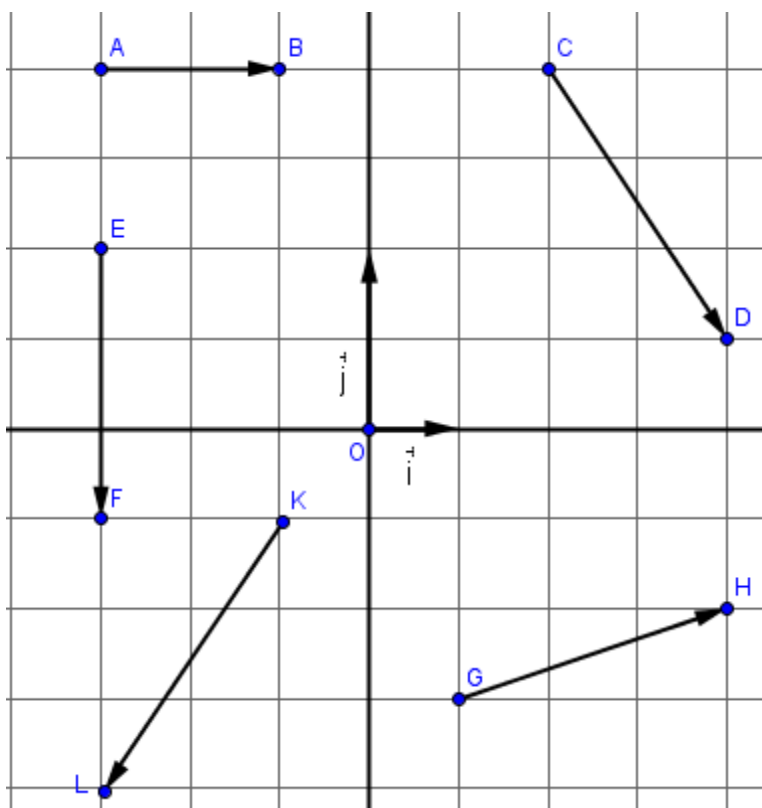
### Lecture 2

Sur le graphique, les vecteurs ont tous comme origine et comme extrémité deux points du quadrillage : on ne tiendra pas compte des quelques imprécisions de construction dû au logiciel utilisé.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthogonal du plan.

Lire graphiquement, les coordonnées de :

$$\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{EF}, \vec{GH}, \vec{KL}$$



### Lecture 3

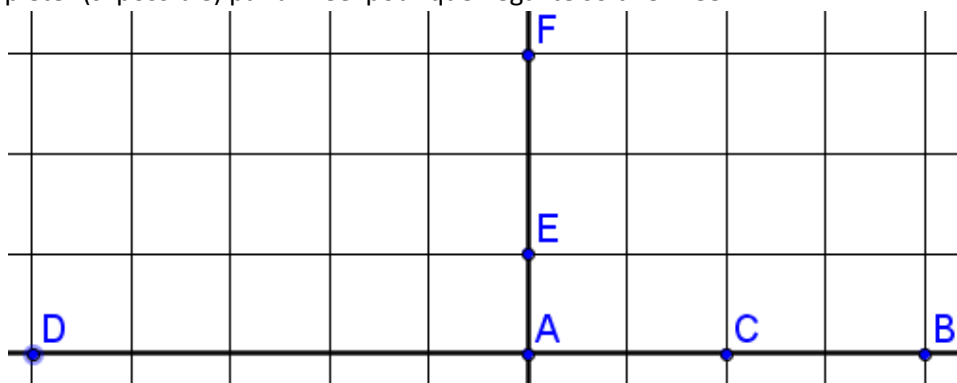
Dans chaque cas, compléter (si possible) par un réel pour que l'égalité soit vérifiée.

a)  $\vec{AD} = \dots \vec{AC}$

b)  $\vec{CA} = \dots \vec{BD}$

c)  $\vec{AF} = \dots \vec{AE}$

d)  $\vec{AC} = \dots \vec{AE}$



## II. Coordonnées

- Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment
- Savoir calculer les coordonnées d'un vecteur
- Connaissant les coordonnées de  $\vec{u}$ , savoir calculer les coordonnées de :  $-3\vec{u}$ ,  $\frac{5}{3}\vec{u}$ , ...,  $k\vec{u}$
- Connaissant les coordonnées de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$ , savoir calculer les coordonnées de :  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $-3\vec{u} + 2\vec{v}$ , ...
- Savoir calculer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle

### Par cœur : formulaire



Pour tous les vecteurs  $\vec{u}(a; b)$  et  $\vec{v}(a'; b')$ , tous les points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ , tous les réels  $k$

1)  $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

2)  $\vec{u} + \vec{v}(a + a'; b + b')$

3)  $k\vec{u}(ka; kb)$

4) I milieu de  $[AB]$   $x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$   $y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$

5)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

6) Dans un repère **orthonormé**,  $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

### Exercice : coordonnées 1

Le plan étant muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on donne :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

1) Calculer les coordonnées des vecteurs  $\vec{w} = -2\vec{u} + 5\vec{v}$

2) On considère  $\vec{a} = -2\vec{i} + 32\vec{j}$ . Que peut-on dire de  $\vec{w}$  et  $\vec{a}$  ?

### Exercice : coordonnées 2

1)  $G(3; 2)$   $L(-5; -3)$   $P(2; -2)$

Déterminer les coordonnées du point  $H$  pour que  $GHLP$  soit un parallélogramme.

2)  $A(-5; -1)$   $B(-2; 3)$

Déterminer les coordonnées du point  $M$  pour que  $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BM}$  puis placer  $M$

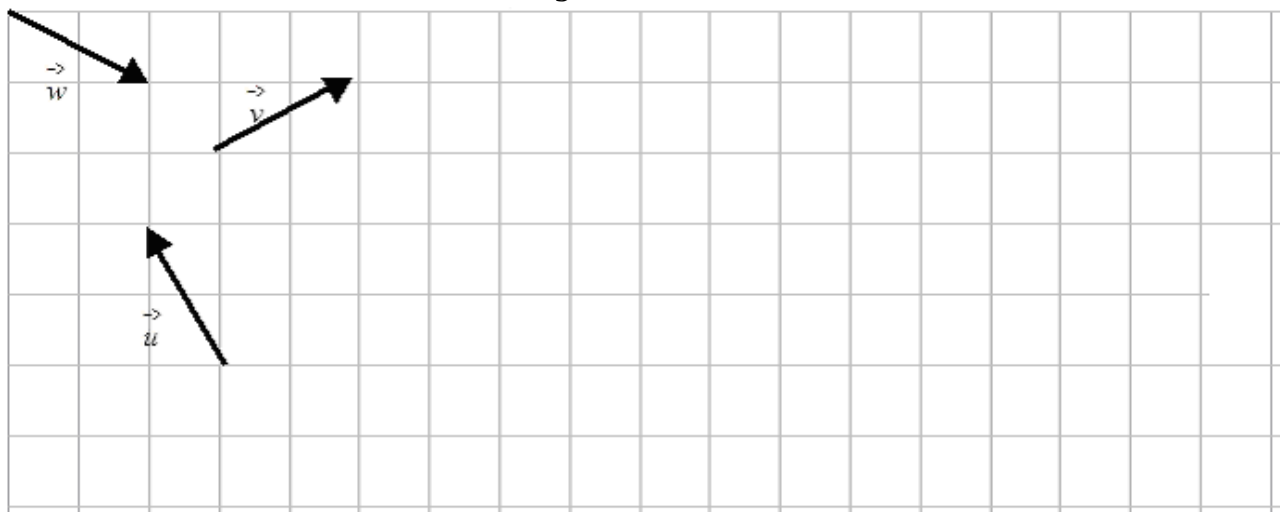
3)  $A(-5; -1)$   $B(-2; 3)$   $C(2; 1)$

Déterminer les coordonnées du point  $N$  pour que  $2\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CN} = \vec{0}$  puis placer  $N$

## III. Constructions

- Savoir construire un représentant de la somme de vecteurs.
- Savoir construire un point (inconnu) défini par une égalité vectorielle.

**Construction 1 :** Construire  $\vec{u} + \vec{v}$  ;  $\frac{2}{3}\vec{u}$  ;  $-2\vec{u}$  ;  $2\vec{w} + \vec{u} - \vec{v}$



**Construction 2**  $GHL$  est un parallélogramme.

1. Construire le point  $F$  tel que :  $\vec{HF} = 3\vec{KL} - 2\vec{LH}$ . Expliquer.
2. Montrer que les points  $L, F$  et  $G$  sont alignés (**piste rouge foncé**).

## IV. Démontrer

*En utilisant les coordonnées, savoir démontrer des propriétés géométriques : quadrilatères particuliers (parallélogramme, rectangle, losange, carré, trapèze), milieu d'un segment, parallélisme de droites, alignement de points.*

**Par cœur :**  $\vec{AB} = \vec{CD}$  si et seulement si  $ABDC$  est un parallélogramme (éventuellement plat)  
 $\vec{AB} = \vec{BC}$  si et seulement si  $B$  est le milieu de  $[AC]$

**Démontrer 1** Le plan étant muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
On donne  $A(3; -2), B(4; 2), C(-1; -1), D(-2; -5), E(8; 1), F(-4; 4)$ .

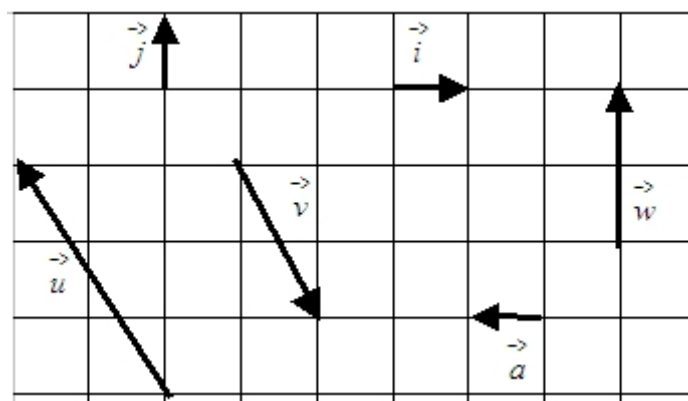
- 1) On appelle  $P$  et  $Q$  les milieux respectifs de  $[AC]$  et  $[BD]$ . Calculer les coordonnées de  $P$  et de  $Q$ . Dédution ?
- 2) Calculer les coordonnées de  $\vec{BE}$  et de  $\vec{AC}$ . Dédution ?
- 3) Calculer les coordonnées de  $\vec{EA}$  et de  $\vec{AD}$ . Dédution ?
- 4) Calculer les coordonnées de  $\vec{FB}$  et de  $\vec{FE}$ . Dédution ?

## Corrigé lecture 1

Sur le graphique, les vecteurs ont comme origine et comme extrémité deux points du quadrillage.

2) Par définition des coordonnées d'un vecteur dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ signifie } \vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$$



De même :  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$

$$\vec{w} = 0\vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{j}$$

$$\vec{a} = -\vec{i} + 0\vec{j} = -\vec{i}$$

## Corrigé lecture 2

Attention à la graduation sur l'axe des ordonnées !

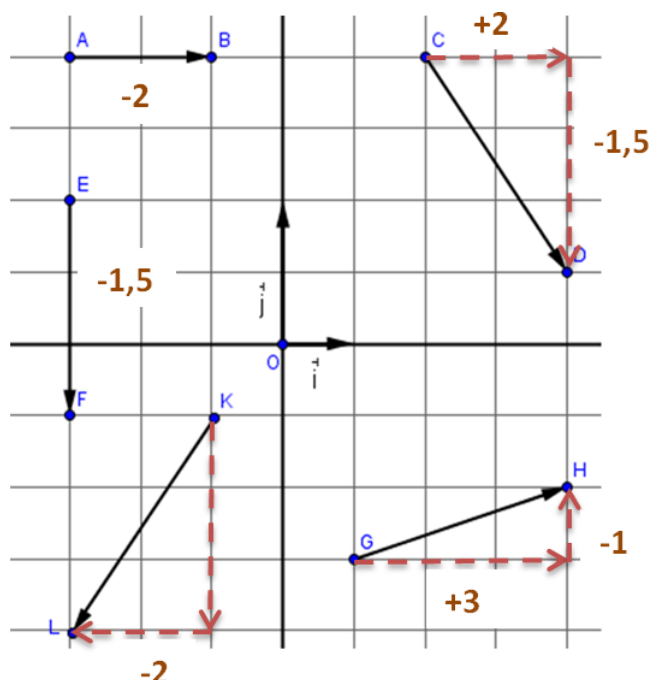
$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = 2\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = 0\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GH} = 3\vec{i} + 0,5\vec{j} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} 3 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{KL} = -2\vec{i} - 1,5\vec{j} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$



## Corrigé lecture 3

**Admis :** Deux vecteurs non nuls ont même direction si et seulement si l'un est un nombre fois l'autre

a) Les vecteurs  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AC}$  semblent avoir même direction donc il va exister un réel  $k$  tel que :  $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AC}$

Les vecteurs ont des sens contraires donc  $k$  est négatif

Pour construire le segment  $[AD]$  à partir du segment  $[AC]$ ,

- on partage le segment  $[AC]$  en parties de même longueur
- et on en reporte 5 pour construire  $[AD]$ .

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{AD} = \frac{-5}{2} \overrightarrow{AC}$$

b) Les vecteurs  $\overrightarrow{CA}$  et  $\overrightarrow{BD}$  semblent avoir même direction donc il va exister un réel  $k$  tel que :  $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{BD}$

Les vecteurs ont le même sens donc  $k$  est positif

$$\text{De plus } CA = \frac{2}{9}BD \text{ (il s'agit de longueur)}$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{CA} = \frac{2}{9} \overrightarrow{BD}$$

c)  $\overrightarrow{AF} = 3 \overrightarrow{AE}$

d) Les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AE}$  n'ont pas la même direction donc **il n'existe pas** de réel  $k$  tel que :  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AE}$

## Coordonnées 2

Le plan étant muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on donne :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

1)  $\vec{w} = -2\vec{u} + 5\vec{v}$  donc  $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \times 2 + 5 \times 1 \\ -2 \times 3 + 5 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix}$

2) Comme  $\begin{cases} -2 = -2 \times 1 \\ 32 = -2 \times (-16) \end{cases}$  Ainsi :  $\vec{a} = -2\vec{w}$  Donc les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{w}$  ont la même direction.

## Coordonnées 3

Dans chacune des questions suivantes, il s'agit de trouver les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle.

On va traduire l'égalité vectorielle :

- par une égalité sur les abscisses
- et par une égalité sur les ordonnées.

On obtient un système que l'on résout.

1) GHLP est un parallélogramme  $\Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{PL}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H - 3 = -7 \\ y_H - 2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -4 \\ y_H = 1 \end{cases}$$

Donc  $H(-4; 1)$

2)  $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BM}$   $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_M + 5) = 2(x_M + 2) \\ 3(y_M + 1) = 2(y_M - 3) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M + 15 = 2x_M + 4 \\ 3y_M + 3 = 2y_M - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -11 \\ y_M = -9 \end{cases}$$

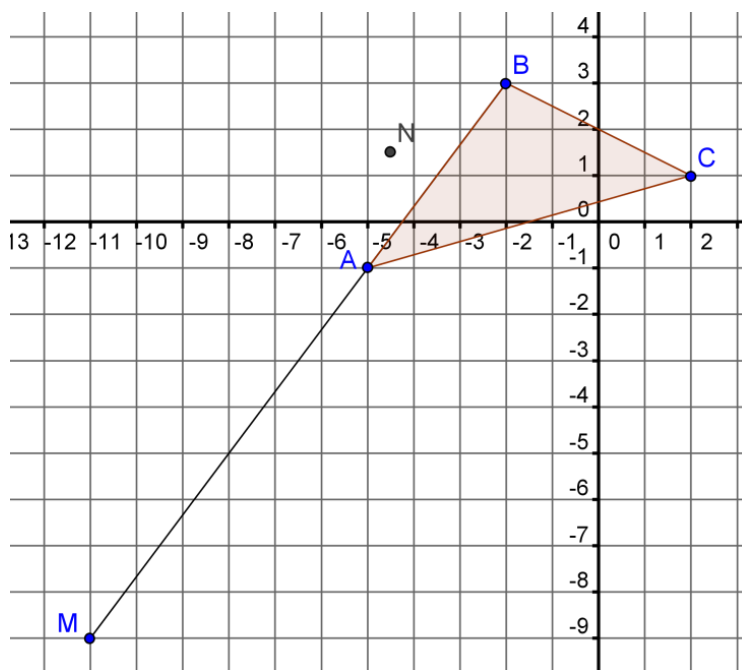
Donc  $M(-11; -9)$

3)  $2\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CN} = \vec{0}$   $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_N + 5) + 3(x_N + 2) - (x_N - 2) = 0 \\ 2(y_N + 1) + 3(y_N - 3) - (y_N - 1) = 0 \end{cases}$

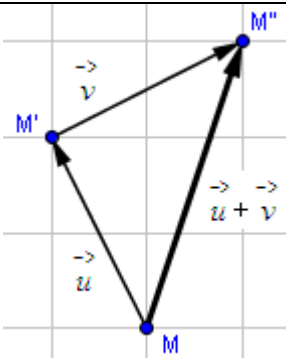
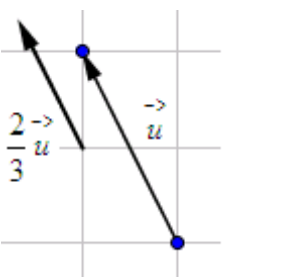
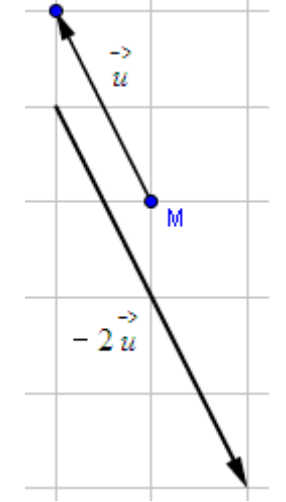
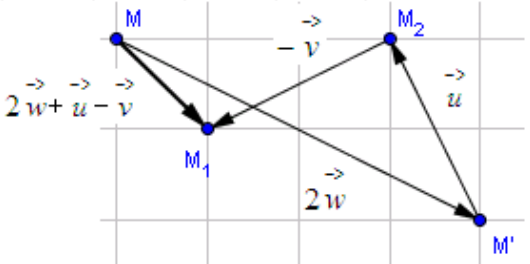
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_N + 18 = 0 \\ 4y_N - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2} \\ y_N = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc  $N(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2})$



## Construction 1

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                      |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{u} + \vec{v}$            | <p>On peut faire la construction en utilisant des translations successives.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) On choisit un point M quelconque</li> <li>2) On détermine son image M' par la translation de vecteur <math>\vec{u}</math></li> <li>3) On détermine M'' l'image de M' par la translation de vecteur <math>\vec{v}</math></li> </ol> <p>Ainsi : <math>\vec{MM''} = \vec{u} + \vec{v}</math></p> |   |
| $\frac{2}{3}\vec{u}$           | <p>Le vecteur <math>\frac{2}{3}\vec{u}</math> a :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Même direction que <math>\vec{u}</math> (parallèle)</li> <li>• Le même sens que celui de <math>\vec{u}</math> (car <math>\frac{2}{3}</math> est positif)</li> <li>• D'une longueur égale à <math>\frac{2}{3}</math> fois celle de <math>\vec{u}</math></li> </ul>                                                        |   |
| $-2\vec{u}$                    | <p>Le vecteur <math>-2\vec{u}</math> a :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Même direction que <math>\vec{u}</math> (parallèle)</li> <li>• Le sens opposé à celui de <math>\vec{u}</math> (car -2 est négatif)</li> <li>• D'une longueur égale à 2 fois celle de <math>\vec{u}</math></li> </ul>                                                                                                              |  |
| $2\vec{w} + \vec{u} - \vec{v}$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |

## Construction 2

### Question 1

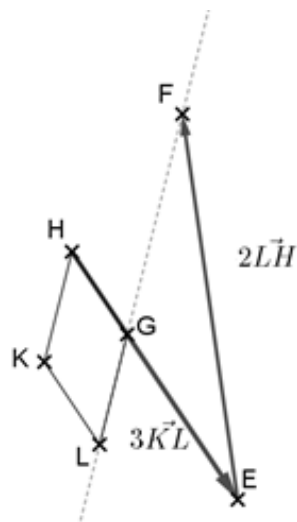
$$\vec{HF} = 3\vec{KL} - 2\vec{HL} = 3\vec{KL} + 2\vec{LH}$$

en partant de H, on va faire une translation de vecteur  $3\vec{KL}$  suivi de la translation de vecteur  $2\vec{LH}$

Soit E l'image de H par la translation de vecteur  $3\vec{KL}$

F est l'image de E par la translation de vecteur  $2\vec{LH}$  (ou du vecteur  $-2\vec{HL}$ )

Si vous ne vous êtes pas trompé, les points L, G et F semblent alignés et il semblerait que :  $\vec{LF} = 3\vec{LG}$



Question 2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LF} &= \overrightarrow{LH} + \overrightarrow{HF} \\ &= \overrightarrow{LH} + 3\overrightarrow{KL} + 2\overrightarrow{LH} \\ &= 3\overrightarrow{KL} + 3\overrightarrow{LH} \\ &= 3(\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LH}) \\ &= 3\overrightarrow{KH} \\ &= 3\overrightarrow{LG}\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

$$\text{car } \overrightarrow{HF} = 3\overrightarrow{KL} - 2\overrightarrow{HL} = 3\overrightarrow{KL} + 2\overrightarrow{LH}$$

d'après la relation de Chasles

car  $GHL$  est un parallélogramme

Comme  $\overrightarrow{LF} = 3\overrightarrow{LG}$ , les vecteurs  $\overrightarrow{LF}$  et  $\overrightarrow{LG}$  ont la même direction  
donc les droites  $(LF)$  et  $(LG)$  sont parallèles avec le point  $L$  en commun  
donc les droites  $(LF)$  et  $(LG)$  sont confondues (il s'agit de la même droite qui passe par  $L, F$  et  $G$ )  
donc les points  $L, H, G$  sont alignés.

## Démontrer 1

1)

Coordonnées de P

$$x_P = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = 1$$

$$y_P = \frac{1}{2}(y_A + y_C) = -1,5$$

donc P ( 1 ; -1,5 )

Coordonnées de Q

$$x_Q = \frac{1}{2}(x_B + x_D) = 1$$

$$y_Q = \frac{1}{2}(y_B + y_D) = -1,5$$

donc Q ( 1 ; -1,5 )

Les diagonales du quadrilatère ABCD ont le même milieu donc ABCD est un parallélogramme.

2) Coordonnées de  $\overrightarrow{BE}$

$$\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Coordonnées de  $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$  donc le quadrilatère ACBE est un parallélogramme.

3) Coordonnées de  $\overrightarrow{EA}$

$$\overrightarrow{EA} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Coordonnées de  $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc  $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AD}$  donc A est le milieu de [ED].